I NOTION DE FONCTION

1° définition

D est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. .
Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D un réel unique noté f(x).
On dit que D est l'ensemble de définition de f, ou encore que f est définie sur D.

2° Exemples

Une fonction peut-être définie par :
une formule de calcul :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\sqrt{x} - 3 \end{cases}$$

f est la fonction qui à tout réel positif associe le double de la racine de ce nombre moins 3
g est la fonction définie sur [– 1; 2] par : $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 3}$

Une situation
L'aire d'un carré est fonction de la longueur de son côté
Le salaire mensuel d'un fonctionnaire est fonction de son indice
Une courbe
le poids théorique d'un bébé est fonction de son âge : courbe du livret de santé.

3° Vocabulaire

- D est l'ensemble de définition de la fonction, noté D_f .
- x est la variable (x peut prendre toutes les valeurs de D_f)
- Le nombre f (x) est l'**image** de x par f ou l'**image** par f de x.
- Si y est l'**image** de x par f, on dit que x est l'**antécédent** de y pour la fonction f

4° Exemple :Le mobile

On lance depuis le sol un mobile, verticalement et vers le haut, à la vitesse de 30 mètres par seconde. La hauteur atteinte par ce mobile est fonction de l'instant x depuis son départ jusqu'au retour au sol
Les lois de la physique montrent que la hauteur atteinte à l'instant x est $f(x) = -5x^2 + 30x$
Le mobile retombe au sol pour x = 6 , on a donc : D = [0 ; 6].
$f : x \longmapsto -5x^2 + 30x$
$f : 2 \longmapsto 40$, $f : 4 \longmapsto 40$
40 est l'image de 2 par f.
2 est un antécédent de 40 par f.
2 et 4 sont les antécédents de 40 par f. 50 n'a pas d'antécédent par f. (Le mobile n'atteint pas la hauteur 50.)

5° Ensemble de définition

Parfois, l'ensemble de définition n'est pas donné : on le trouve suivant le contexte ou la formule de la fonction.

$f(x) = 2x + \dfrac{3}{x - 5}$ $\qquad f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x - 1}$

II REPRESENTATION GRAPHIQUE

1° Définition

Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on appelle courbe représentative de la fonction f l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x est un réel de D.
"Y = f(x) " est l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$
Appelons $\mathscr{C}_f$ cette courbe. Pour placer des points de $\mathscr{C}_f$, on peut utiliser une table de valeurs.

2° Remarque

a) On notera que l'image d'un réel par une fonction étant unique, la courbe représentative d'une fonction ne peut pas contenir deux points différents de même abscisse: elle n'est coupée par une « verticale » qu'en un point, au plus.
b) $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = f(x)$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x - 1}{x + 2}$. La courbe $\mathscr{C}$ à pour équation d'équation " $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ ". le point $M(1 ; \dfrac{1}{3})$ est–il sur la courbe $\mathscr{C}$?

3° Lecture graphique

a) Recherche d'image.

Chercher l'image d'un réel a par une fonction f c'est chercher s'il existe le réel f(a) c'est-à-dire l'ordonnée f(a) du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

Les points du plan d'abscisse a sont ceux de la droite d'équation « x = a ».

L'image par f de a est l'ordonnée du point commun à $\mathscr{C}_f$ **et à la droite d'équation « x = a» s'il existe.**

b) Recherche d'antécédents.

Chercher les antécédents d'un réel *k* par une fonction f, définie sur un ensemble D, c'est chercher tous les réels x de D tels que f(x) = k, c'est-à-dire toutes les abscisses x des points de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée *k*.

Les points du plan d'ordonnée *k* sont ceux de la droite d'équation y = k.

Les antécédents par f de k sont donc les abscisses des points communs à $\mathscr{C}_f$ **et à la droite d'équation « y = k» s'ils existent.**

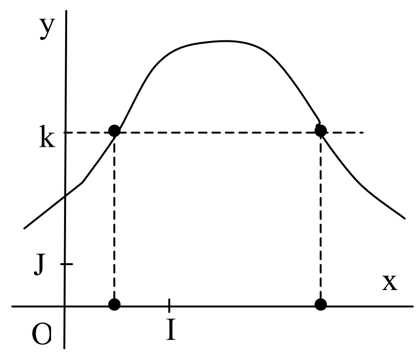
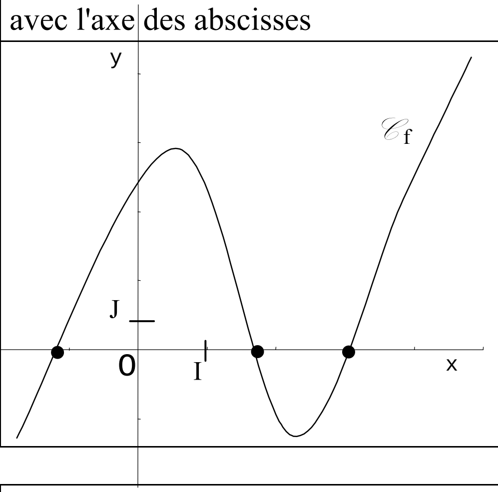
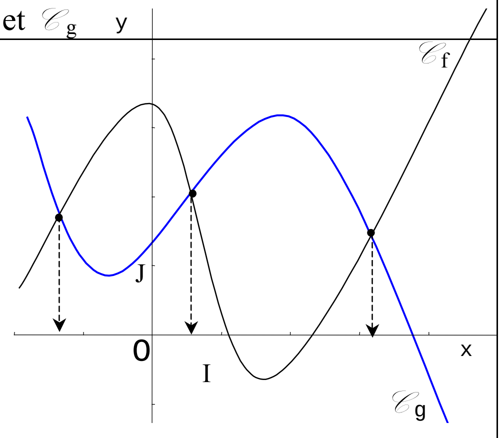
4° Résolution graphique

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble de définition $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

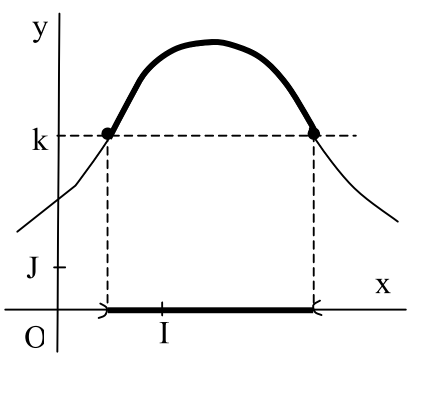
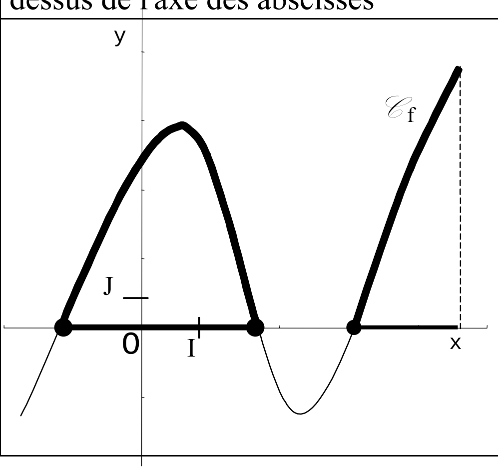
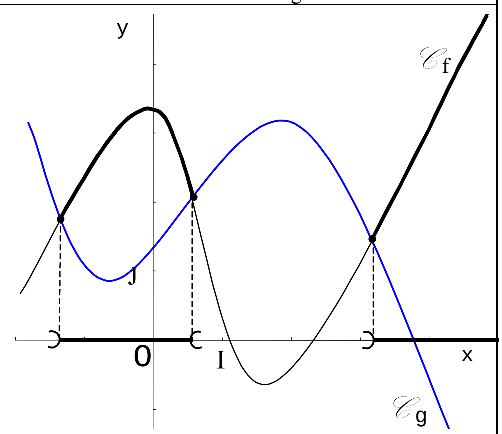
La variable x est l'abscisse, f (x) est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.

Lorsque l'on recherche x tel que f(x) = k , cela signifie que l'on recherche les valeurs de la variable x dont l'image par la fonction f est k autrement dit, on recherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est k.

Equations

f(x) = k	f(x) = 0	f(x) = g(x)
les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation y = k	les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses	les solutions sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
		

Inéquations

f(x) > k	f(x) ≥ 0	f(x) > g(x)
les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au dessus de la droite d'équation y = k	les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de l'axe des abscisses	les solutions sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$
		

III SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

1° Définitions

f est une fonction et I un intervalle contenu dans son ensemble de définition

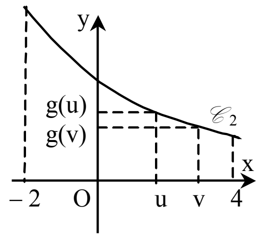
Dire que f est strictement croissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I,
l'inégalité $u < v$ implique $f(u) < f(v)$.

Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous réels u et v de I,
l'inégalité $u < v$ implique $f(u) > f(v)$.

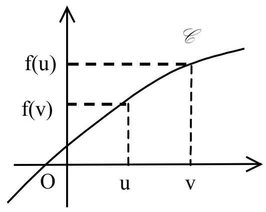
Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels u et v de I,
l'inégalité $u < v$ implique $f(u) = f(v)$.

Si dans la première définition, on remplace l'inégalité $f(u) < f(v)$ par $f(u) \leq f(v)$, on dit que f est croissante sur I.
Si dans la deuxième définition, on remplace $f(u) > f(v)$ par $f(u) \geq f(v)$, on dit que f est décroissante sur I.

2° Exemples graphiques



Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentent respectivement des fonctions f et g définies sur $[-2 ; 4]$. .
D'après l'allure de la courbe $\mathscr{C}_1$ pour tous réels u et v de $[-2;4]$
,si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$. f est strictement croissante sur $[-2 ; 4]$.
Graphiquement : « la courbe monte » de la gauche vers la droite.

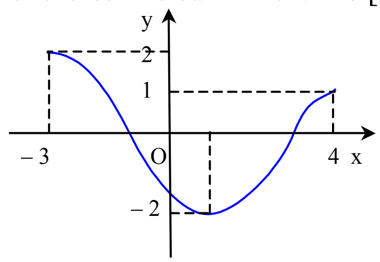


D'après l'allure de la courbe $\mathscr{C}_2$, pour tous réels u et v de $[-2 ; 4]$,
si $u < v$ alors $g(u) > g(v)$. g est strictement décroissante sur $[-2 ; 4]$.
Graphiquement: «la courbe descend» de la gauche vers la droite.

3° Tableau de variation

Étudier les variations (ou le sens de variation) d'une fonction f définie sur un intervalle I revient à déterminer les intervalles inclus dans I sur lesquels la fonction f est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.
On résume les résultats de cette étude dans un tableau appelé tableau de variations de f.
Exemple :
La fonction f représentée ci-contre est : décroissante sur l'intervalle $[-3 ; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;4]$.
Son tableau de variations est le suivant :

x	– 3		1		4
Variations de f	2	↘	– 2	↗	1



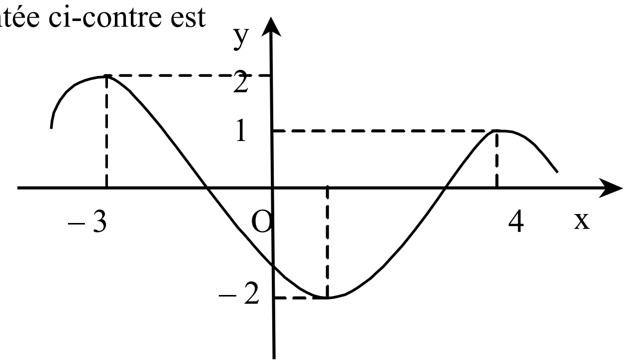
III MAXIMUM ET MINIMUM SUR UN INTERVALLE

1° Notions de minimum et de maximum

f est une fonction, I un intervalle inclus dans son domaine de définition et a un réel de I. . Dire que f (a) est le minimum de f sur I signifie que f (a) est la plus petite valeur de la fonction :
pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$.
Dire que f (a) est le maximum de f sur I signifie que f (a) est la plus grande valeur de la fonction :
pour tout réel x de 1, $f(x) \leq f(a)$.

2° Exemple

Le minimum sur l'intervalle $[-5 ; 6]$ de la fonction f représentée ci-contre est – 2.
Il est obtenu lorsque x = 1,5.
En effet, A est le point le plus « bas » de la courbe.



Le maximum sur l'intervalle $[-5 ; 6]$ est 4.
Il est obtenu lorsque x = –– 3.
En effet, B est le point le plus « haut » de la courbe.

3° Propiété

Si f est croissante sur [a b] et décroissante sur [b c] alors f admet un maximum en b sur [a b]
Si f est décroissante sur [a b] et croissante sur [b c] alors f admet un minimum en b sur [a b]