

FONCTIONS USUELLES

I FONCTIONS AFFINES

1° Définition

a et b sont deux réels donnés. Lorsqu'à chaque réel x , on associe le réel $a x + b$, on définit une fonction affine f et on note $f(x) = a x + b$.

EXEMPLES : Les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 x + 5$ et $g(x) = 2 x - 7$ sont des fonctions affines.

Lorsque $b = 0$, la fonction est dite linéaire, comme par exemple $f(x) : x \mapsto 3 x$.

Lorsque $a = 0$, la fonction est dite constante, comme par exemple, $f(x) = 3$, pour tout réel x .

2° Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite d . Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

3° Equation de droite

Si f est définie par $f(x) = a x + b$, alors une équation de cette droite d est $y = a x + b$.

Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite d .

La droite d passe par le point $B(0 ; b)$, on dit que b est l'ordonnée à l'origine.

4° Fonctions affines et taux de variation

f est une fonction affine définie par $f(x) = a x + b$.

Alors pour tous u et v tels que $u \neq v$, $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$. Ce rapport est appelé taux de variation de f entre u et v .

DÉMONSTRATION u et v sont des réels.

Alors $f(u) = a u + b$ et $f(v) = a v + b$ donc $f(u) - f(v) = (a u + b) - (a v + b) = a u - a v = a(u - v)$ d'où

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$$

5° propriété caractéristique

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que les réels $\frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ sont tous égaux à un réel a .

Alors f est la fonction affine définie par $f(x) = a x + f(0)$.

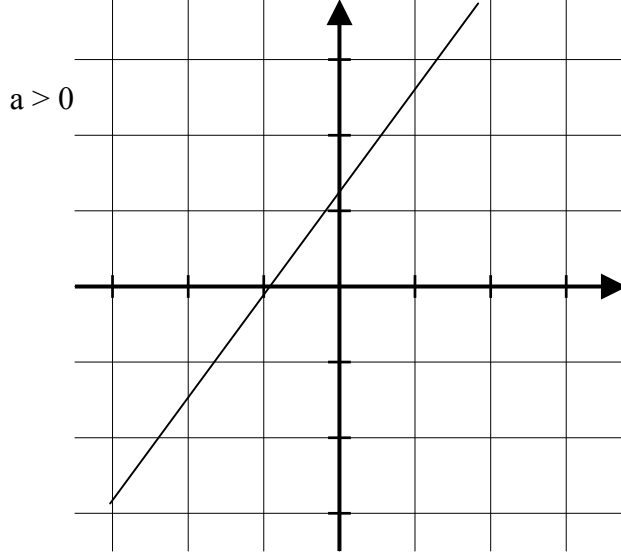
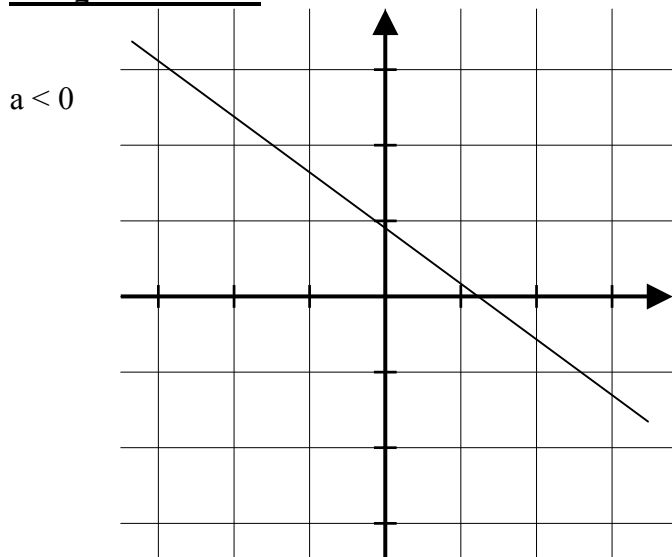
DÉMONSTRATION

Par hypothèse pour tous u et v , $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$. Donc en particulier si $v = 0$

$$\frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = a \text{ donc } f(u) - f(0) = a \times u \text{ donc } f(u) = a u + f(0)$$

Donc f est la fonction affine $x \mapsto a x + f(0)$.

6° Signe de $a x + b$



II LA FONCTION CARREE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

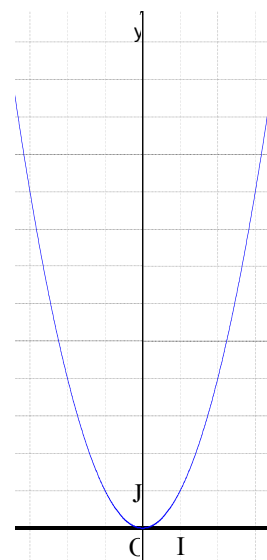
f est définie sur $\mathbb{R}$.

1° Représentation graphique de f .

Etablir un tableau de valeurs en utilisant la calculatrice.

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
f(x)	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9

La courbe représentative de f est appelée une parabole.



2° Etude de la parité de f

Soit $x \in \mathbb{R}$, comparer $f(x)$ et $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Définition :

On dit que f est une fonction paire si et seulement si on a :

- D_f est symétrique par rapport à 0
- Pour tout réel x $f(-x) = f(x)$

Graphiquement, cela signifie que les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de f sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

La représentation graphique de f admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

3° Sens de variation de f

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Calcul du taux d'accroissement (ou de variation) de f entre a et b :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$$

Si a et b sont positifs ou nuls, alors $a + b > 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) < 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Si a et b sont négatifs ou nuls, alors $a + b < 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) > 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

4° Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = 0$

- $x^2 = 1$

- $x^2 = -1$

Résoudre les inéquations suivantes :

- $x^2 \leq \frac{1}{4}$

- $x^2 > 4$

- $x^2 < -1$

III LA FONCTION INVERSE

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

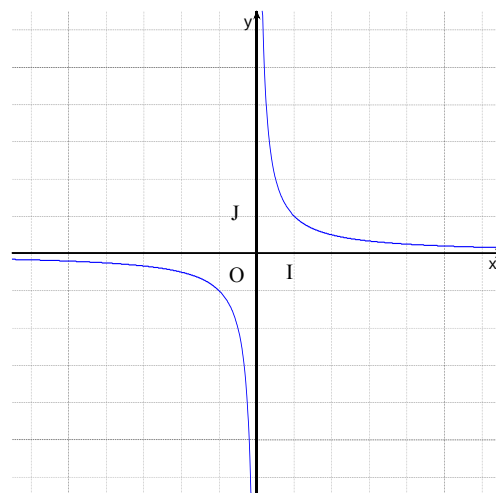
g est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

1° représentation graphique

Tableau de valeurs :

x	-5	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
g(x)	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	5	
4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	

La courbe représentative de g s'appelle une hyperbole.



2° Etude de la parité de g

Soit $x \in \mathbb{R}$, comparer $g(x)$ et $g(-x)$. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$.

On dit que g est une fonction impaire.

Définition :

On dit que g est une fonction impaire si et seulement si on a :

- D_g est symétrique par rapport à 0
- Pour tout réel x , $g(-x) = -g(x)$

Graphiquement, cela signifie que les points $M(x ; g(x))$ et $M'(-x ; g(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de g sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.

La représentation graphique de g admet donc l'origine O du repère pour centre de symétrie.

3° Sens de variation de g

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g			

g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$
 g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Calcul du taux d'accroissement (ou de variation) de f entre a et b : $a \neq b$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{\frac{a - b}{ab}}{b - a} = -\frac{1}{ab}$$

• Si a et b sont strictement positifs, alors $a \times b > 0$ on déduit que $f(b) - f(a) < 0$ d'où $f(a) > f(b)$

Donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Si a et b sont strictement négatifs, alors $a \times b > 0$ on déduit que $f(b) - f(a) < 0$ d'où $f(a) > f(b)$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

• Si a et b sont strictement positifs, $ab > 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Si a et b sont strictement négatifs, $ab < 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

4° Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

• $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$

• $\frac{1}{x} > 4$

• $\frac{1}{x} < -1$