REPERE D'UNE DROITE, D'UN PLAN

I REPERE D'UNE DROITE

1° Repère d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite On appelle repère de $\mathscr{D}$ tout couple $(O , \vec{i})$ où $\vec{i}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et o un point de $\mathscr{D}$

2° Absciice d'un point .

M a pour abscisse x_M signifie que $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i}$

Si A a pour abscisse x_A et b a pour abscisse x_B alors $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i}$

II REPERE DU PLAN

1° Définition

Un repère du plan est constitué d'un point O du plan appelé origine du repère et d'un couple de deux vecteurs non colinéaires $(\vec{i} , \vec{j})$ du plan $\mathscr{P}$ appelé base du repère. on note le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Remarque :

Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, le repère est orthogonal.

Lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et lorsqu'ils ont pour longueur (norme) 1, le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dit orthonormal

2° Coordonnées d'un point dans un repère

Soit M un point du plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit H le projeté orthogonal de m sur l'axe $(O , \vec{i})$ et K le projeté orthogonal de m sur l'axe $(O , \vec{j})$

Il existe un unique réel x et un unique réel y tels que $\overrightarrow{OH} = x \vec{i}$ et $\overrightarrow{OK} = y \vec{j}$.

On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Définition

Le point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

x est **l'abscisse** de M et y est **l'ordonnée** de M. On note M(x ; y).

3° Coordonnées de vecteurs

Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x , y) dans la base $(\vec{i} , \vec{j})$ signifie que : $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4° Egalité de deux vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

$x \vec{i} + y \vec{j} = x' \vec{i} + y' \vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

5° Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration :

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (- x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) + x_B i + y_B \vec{j} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$

6° calculs vectoriels

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs et k est un réel quelconque,

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$;
- Le vecteur $k \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k x \\ k y \end{pmatrix}$.

Démonstration
$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$ donc $\vec{u} + \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} = (x + x')\,\vec{i} + (y + y')\,\vec{j}$

6° Condition de colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$.

7° Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan muni d'un repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$,
Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration : En effet, I est le milieu de [AB] se traduit par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ y_I - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{2\,x_A + y_B - x_A}{2} \\ y_I = \dfrac{2\,y_A + y_B - y_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

8° Distance entre deux points, norme d'un vecteur

$A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points d'un repère **orthonormal** $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$.

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base **orthonormale** $(\ \vec{i};\ \vec{j})$.

$$\boxed{\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$