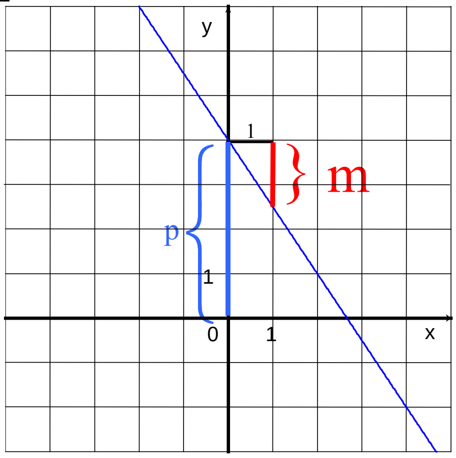
EQUATIONS DE DROITES ET SYSTEMES.



I EQUATIONS DE DROITES

1° Equation de droite

Dans un repère, toute droite $\mathscr{D}$ a une équation de la forme

- $y = m\,x + p$, si $\mathscr{D}$ est non parallèle à l'axe des ordonnées ;
- $x = c$, si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

2° Une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = a\,x + b$

- m est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$,
- p l'ordonnée à l'origine .

3° Equation de la droite (AB)

1ière méthode : $A \in \mathscr{D} \Leftrightarrow y_A = m \times x_A + p$ et $B \in \mathscr{D} \Leftrightarrow y_B = m\,x_B + p$.

pour déterminer les réels m et p il faut résoudre le système : $\begin{cases} y_A = m\,xa + p \\ y_B = m\,x_B + p \end{cases}$

2ième méthode : calcul de m : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_B}$ calcul de p : $M \in \mathscr{D}$ donc $y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_B} \times x_A + p$

Equation de $\mathscr{D}$: $y = y_A + (x - x_A) \times \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_B}$

3ième méthode : $M(x , y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ colinéaires

Equation de $\mathscr{D}$: $(x - x_A)\,(y_B - y_A) - (y - y_A)\,(x_B - x_A) = 0 \Leftrightarrow y = y_A + (x - x_A) \times \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_B}$

4° Equation d'une droite définie par un point par A et un vecteur non nul.

a) Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul de même direction que $\mathscr{D}$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$, alors tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
Si A et B sont deux points quelconques et distincts de $\mathscr{D}$, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

b) Droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$

La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires
$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

c) Equation de $\mathscr{D}$ droite passant par $A(x_A, y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $u'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow b\,(x - x_A) - a\,(y - y_A) = 0$

- Si $a \neq 0$: $b\,(x - x_A) - a\,(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow y = y_A + \dfrac{b}{a}(x - x_A)$
- Si $a = 0$: $b\,(x - x_A) - a\,(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow x = x_A$

II DROITES PARALLELES.

1° Vecteur directeur et parallélisme

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la même droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2° vecteur directeur et coefficient directeur

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Si une droite a pour équation $y = m\,x + p$, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, alors m est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$.

Si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ et si $a \neq 0$ alors $m = \dfrac{b}{a}$ est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$

3° Droites parallèles et coefficient directeur

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = m x + p$ et la droite $\mathscr{D}'$ $y = m' x + p'$.
Dire que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles équivaut à dire que $a = a'$.

4° Droites perpendiculaires et coefficient directeur

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = m x + p$ et la droite $\mathscr{D}'$ $y = m' x + p'$.
Dire que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont perpendiculaires équivaut à dire que $m \times m' = -1$.

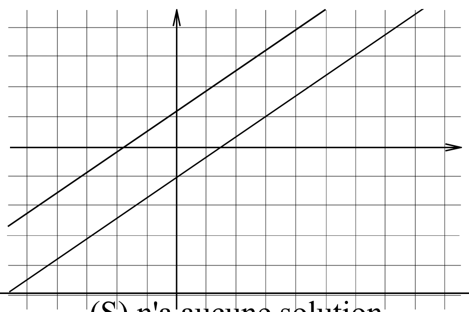
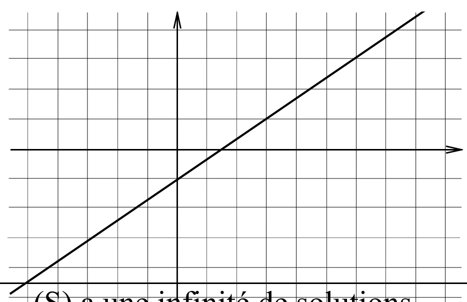
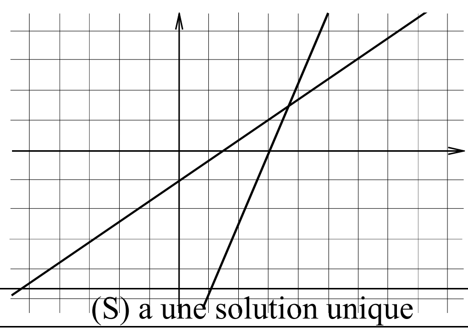
III SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS LINEAIRES A DEUX INCONNUES ,

1° Définitions Interprétation géométrique

Des nombres réels a, b, c, a', b', c' étant donnés tels que a et b ne soient pas simultanément nuls ainsi que a' et b', résoudre le système (S) : $\begin{cases} a x + b y = c & (1) \\ a' x + b'y = c' & (2) \end{cases}$ de deux équations linéaires à deux inconnues], c'est trouver tous les couples (x, y) de nombres réels vérifiant simultanément les relations (1) et (2). Ces couples sont aussi appelés solutions du système.

2° Nombre de solutions d'un système

Soit (S) le système $\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases}$ alors (S) admet :

Soit aucun couple solution	Soit une infinité de couples solutions	Soit une solution unique
$a b' - a' b = 0$		$a b' - a' b \neq 0$
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles	$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondue	$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes
		
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions	(S) a une solution unique

Dand un plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors

$a x + b y = c$ est une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation réduite $y = -\frac{a}{b} x + c$

$a' x + b' y = c'$ est une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation réduite $y = -\frac{a'}{b'} x + c'$

Avec ces notations, trouver les couples (x, y) solutions de (S) revient à trouver les points M de coordonnées (x, y) communs à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

a) Premier cas : $\boxed{a b' - a' b \neq 0}$ Alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et ont un point commun unique : $M(x_0, y_0)$, donc (S) a une solution et une seule : (x_0, y_0).

b) Deuxième cas : $\boxed{a b' - a' b = 0}$ Alors $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles, leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires

- si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont distinctes, donc strictement parallèles, elles n'ont aucun point commun, S n'a pas de solutions.
- si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondues. S a une infinité de solutions

3° Méthodes de résolution

On commencera par calculer $a \times b' - a' \times b$

- Si $a \times b' - a' \times b = 0$ Chercher le réel k tel que $a' = k a$ et $b' = k b$

si $c' \neq k c$: pas de solution
si $c' = k c$: infinité de solutions.

- Si $a \times b' - a' \times b \neq 0$

Alors (S) a une solution et une seule (xo, yo).

Exemple : Soit le système (S) $\begin{cases} 2\ x - 3\ y = -1 & (L_1) \\ 11\ x - 15\ y = 2 & (L_2) \end{cases}$

On a ici a b' – a' b = $2 \times (-15) - 11 \times (-3) = 3$ donc (S) a une solution et une seule : (xo, yo).

Méthode de substitution. La relation (L_1) donne $2\ x = 3\ y - 1$ donc **$x = 2 - y - 2$.**

Dans 11 **x** – 15 y = 2, on substitue alors à **x** cette valeur **2 y – 2** On obtient alors : 11 **(2 y – 2)** – 15 y = 2
ce qui donne, après simplification (2 – 15) y = 2 + 2 donc y = 5. Avec x = 2 – y – 2 et y = 5, il vient x = 7.
En conclusion, la solution unique de (S) est (7, 5).

Méthode des combinaisons linéaires

On reprend le système (S) $\begin{cases} 2\ x - 3\ y = -1 & (L_1) \\ 11\ x - 15\ y = 2 & (L_2) \end{cases}$ Combinaison linéaire " $5\ L_1 - L_2$ "

En multipliant L_1 par 5, il vient l0 x- – 15 y = – 5 puis en retranchant L_2 on voit disparaître y

$\begin{cases} 2\ x - 3\ y = -1 & (L_1) \\ 11\ x - 15\ y = 2 & (L_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\ x - 15\ y = -5 \\ -11\ x + 15\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow (11 - 10)\ x - (15 - 15)\ y = 2 - (-5) \Rightarrow x = 7.$

On termine avec 3 y = 2 x + 1 pour obtenir y = 5.