Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

Activité 1 : Un exemple

1° On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2y = 4 & (E1) \\ 13x - y = 5 & (E2) \end{cases}$

a) Les couples suivants vérifient-ils l'équation (E1) ? l'équation (E2) ? le système (S) ?

$$(-1 , 0) \quad (0 ; 2) \quad (2 , 1) \quad (\frac{1}{3} ; -4) \quad (1 ; -2).$$

b) Ecrire les deux équations (S) sous la forme y = a x + b. Puis, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer les deux droites (d1) et (d2) représentant les équations obtenues.
c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection 1 des droites (d1) et (d2) ?
Retrouve-t-on le résultat du 1. ? Combien le système (S) a-t-il de solutions ? Pourquoi ?

2° On considère le système (S') $\begin{cases} x + 2y = 4 & (E\ 1) \\ 2x + 4y = -6 & (E2) \end{cases}$

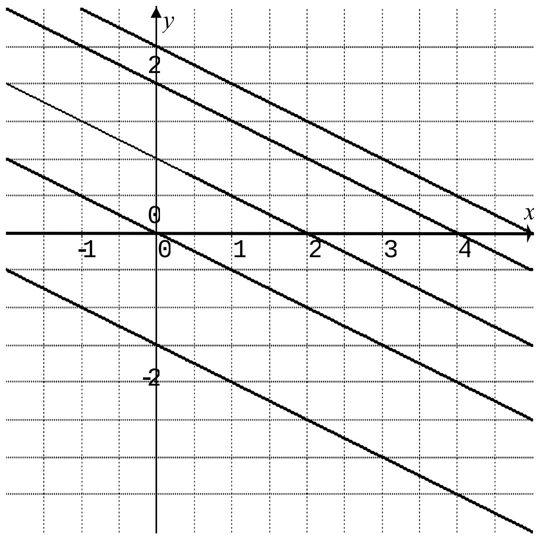
Sur un nouveau graphique, représenter les deux équations de ce système, comme à la question b).
Combien a-t-il de solutions ?

3° On considère le système (S") $\begin{cases} x + 2y = 4 & (E\ 1) \\ 2x + 4y = m & (E2) \end{cases}$

Sur ce graphique, on a tracé la représentation graphique de l'équation 2 x + 4 y = m pour les valeurs suivantes de m :

$$-6 ; 0 ; 4 ; 8 ; 10.$$

a) Associer chaque droite à la valeur de m correspondante.
b) Parmi ces droites, l'une représente l'équation (E1). Laquelle ?
c) Quelle valeur faut-il donner à m pour que les deux équations du système (S") soient représentées par une même droite ?
Combien ce système a-t-il alors de solutions ?
Donner trois solutions de ce système.
d) Supposons m différent de la valeur trouvée au c)
Combien le système (S") a-t-il alors de solutions ?
Interpréter graphiquement ce résultat.



Activité 2 : Système de deux équations

Un système linéaire de deux équation à deux inconnues est un système de la forme : (S) : $\begin{cases} a x + b y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

où a, a’, b, b’, c et c’ sont des nombres réels donnés et x et y sont les inconnues.
Une solution de ce système est un couple (x ; y) vérifiant simultanément les deux équations.

1° Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

2° On revient au cas général.

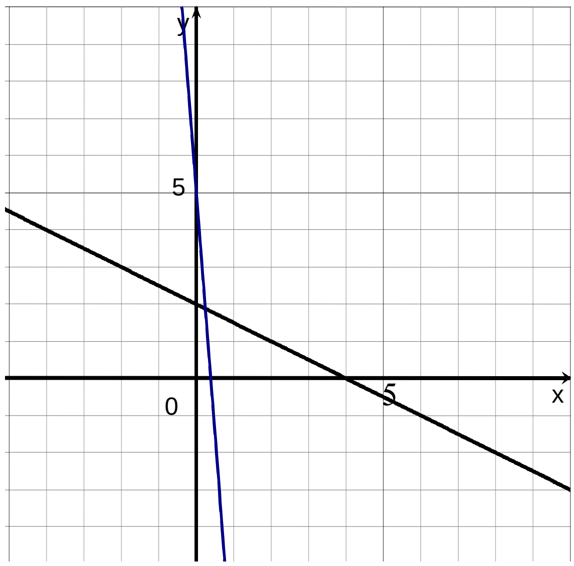
En utilisant l’interprétation graphique faite précédemment, indiquer le nombre de solutions que peut avoir un tel système.

3° On cherche à savoir à quelle(s) condition(s) le système admet une solution unique.

On suppose dans cette question que b et b’ sont différents de 0 et on appelle D et D’ les droites associées à chacune des équations du système.
a) A quelle condition géométrique le système (S) admet-il une solution unique ?
b) Exprimer, dans chacune des équations, y en fonction de x. Donner le coefficient directeur de chacune des droites D et D’.
c) Donner une relation entre a, b, a’ et b’ pour que le système admette une solution unique.
d) Résumer les résultats obtenus.

Activité 1 : Un exemple 1° On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2\ y = 4 & \text{(E1)} \\ 13\ x - y = 5 & \text{(E2)} \end{cases}$ a) Les couples suivants vérifient-ils l'équation (E1) ? l'équation (E2) ? le système (S) ?$(-1 , 0)$ $(0 ; 2)$ $(2 , 1)$ $(\frac{1}{3} ; -4)$ $(1 ; -2)$.

$-1 + 2 \times 0 = -1 \neq 4$ donc $(-1 , 0)$ n'est pas solution de E1
$13 \times (-1) - 0 = 13 \neq 5$ donc $(-1 , 0)$ n'est pas solution de E2
et $(-1 , 0)$ n'est pas solution du système.
$0 + 2 \times 2 = 4$ donc $(0 , 2)$ est solution de E1
$13 \times 0 - 2 = -2 \neq 5$ donc $(0 , 2)$ n'est pas solution de E2
et $(0 , 2)$ n'est pas solution du système.
$2 + 2 \times 1 = 4$ donc $(2,1)$ est solution de E1
$13 \times 2 - 1 = 25 \neq 5$ donc $(2 , 1)$ n'est pas solution de E2
et $(2 , 1)$ n'est pas solution du système.
$\frac{1}{3} + 2 \times (-4) \neq 4$ donc $\left(\frac{1}{3} , -4\right)$ n'est pas solution de E1
$13 \times \frac{1}{3} + 4 \neq 5$ donc $\left(\frac{1}{3} , -4\right)$ n'est pas solution de E2
et $\left(\frac{1}{3} , -4\right)$ n'est pas solution du système.
$1 + 2 \times (-2) \neq 4$ donc $(1 , -2)$ n'est pas solution de E1
$13 \times 1 + 2 \neq 5$ donc $(1 , -2)$ n'est pas solution de E2 et $(1 , -2)$ n'est pas solution du système.



b) Ecrire les deux équations (S) sous la forme y = a x + b. Puis, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer les deux droites (d1) et (d2) représentant les équations obtenues.

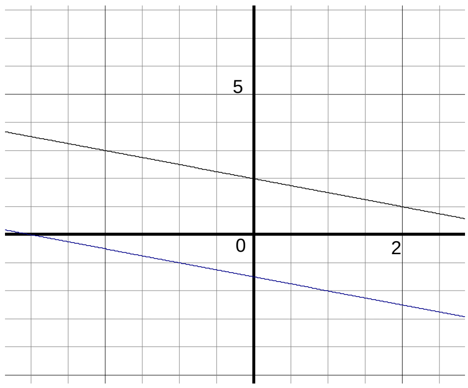
$(E1) : x + 2\ y = 4 \Leftrightarrow 2\ y = 4 - x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} x + 2$

$(E2) : 13\ x - y = 5 \Leftrightarrow y = 13\ x - 5$

c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection 1 des droites (d1) et (d2) ? Retrouve-t-on le résultat du 1. ? Combien le système (S) a-t-il de solutions ? Pourquoi ?

$$\begin{cases} x + 2\ y = 4 & \text{(E1)} \\ 13\ x - y = 5 & \text{(E2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\ (13\ x - 5) = 4 \\ y = 13\ x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27\ x = 14 \\ y = 13 \times \frac{14}{27} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{27} \\ y = \frac{47}{27} \end{cases}$$

Le système a une solution et une seule car les droites (d1) et (d2) sont sécantes.



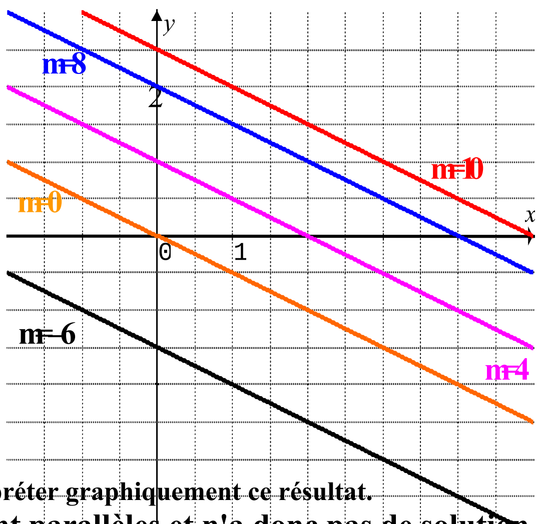
2° On considère le système (S') $\begin{cases} x + 2y = 4 & \text{(E 1)} \\ 2\ x + 4\ y = -6 & \text{(E2)} \end{cases}$
Sur un nouveau graphique, représenter les deux équations de ce système, comme à la question b). Combien a-t-il de solutions ?

$x + 2\ y = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} x + 2$

$2\ x + 4\ y = -6 \Leftrightarrow 4\ y = -6 - 2\ x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} x - \frac{3}{2}$

Les deux droites sont strictement parallèles, le système n'a donc pas de solution

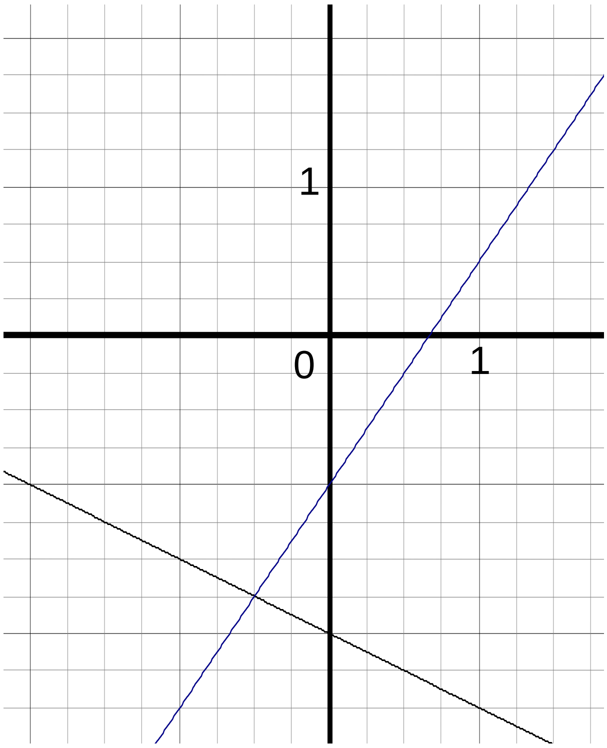
3° On considère le système (S") $\begin{cases} x + 2\ y = 4 & \text{(E 1)} \\ 2\ x + 4\ y = m & \text{(E2)} \end{cases}$
Sur ce graphique, on a tracé la représentation graphique de l'équation 2 x + 4 y = m pour les valeurs suivantes de m : – 6 ; 0 ; 4 ; 8 ; 10.
a) Associer chaque droite à la valeur de m correspondante.



b) Parmi ces droites, l'une représente l'équation (E1). Laquelle ?
Quand m = 8 on a : $2\ x + 4\ y = 8 \Leftrightarrow x + 2\ y = 4$
c) Quelle valeur faut-il donner à m pour que les deux équations du système (S") soient représentées par une même droite ? Combien ce système a-t-il alors de solutions ?
Donner trois solutions de ce système.
En dpnnant la valeur 8 à m les deux équations sont représentées par une même droite et le système admet une infinité de solutions
$(4 , 0)$, $(2 , 1)$ et $(-4 , 4)$ sont solution du système.
d) Supposons m ≠ 8 Combien le système (S") a-t-il alors de solutions ? Interpréter graphiquement ce résultat.
si m ≠ de 8 E1 et E2 sont représentés par deux droites strictement parallèles et n'a donc pas de solution.

Activité 2 : Système de deux équations Un système linéaire de deux équation à deux inconnues est un système de la forme : (S) :

$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ **où a, a', b, b', c et c' sont des nombres réels donnés et x et y sont les inconnues. Une solution de ce système est un couple (x ; y) vérifiant simultanément les deux équations.**



1° Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3\,x - 2\,y = 2 \\ x + 2\,y = -4 \end{cases}$

Graphiquement on lit

2° On revient au cas général.
En utilisant l'interprétation graphique faite précédemment, indiquer le nombre de solutions que peut avoir un tel système.

Si les droites sont confondues le système a une infinité de solutions représentées par la droite.

si les droites sont strictement parallèles le système n'a pas de solution

si les droites sont sécantes le système a une solution et une seule.

3° On cherche à savoir à quelle(s) condition(s) le système admet une solution unique. On suppose dans cette question que b et b' sont différents de 0 et on appelle D et D' les droites associées à chacune des équations du système.

a) A quelle condition géométrique le système (S) admet-il une solution unique ?

Le système (S) admet une solution unique si et seulement si D et D' sont sécantes.

b) Exprimer, dans chacune des équations, y en fonction de x. Donner le coefficient directeur de chacune des droites D et D'.

$a\,x + b\,y = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ coefficient directeur de D : $-\frac{a}{b}$

$a'\,x + b'\,y = c' \Leftrightarrow y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}$ coefficient directeur de D' : $-\frac{a'}{b'}$

c) Donner une relation entre a, b, a' et b' pour que le système admette une solution unique.

D et D' sont sécantes si et seulement si leurs coefficients directeurs sont différents c'est à dire $-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$

$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a\,b' = b\,a' \Leftrightarrow a'\,b - a\,b' = 0.$

Donc le système a une solution unique si et seulement si $a'\,b - a\,b' \neq 0$.

d) Résumer les résultats obtenus.

Si $a'\,b - a\,b' = 0$ alors soit le système n'a pas de solution sont il en a une infinité qui peuvent être représentée par une droite

Si $a'\,b - a\,b' \neq 0$ alors le système admet une solution et une seule.