BAC BLANC TS
ELEVES SUIVANT L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE MATHS

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm)

1°)Déterminer et représenter dans le plan P, l'ense mble D des points M dont l'affixe *z* vérifie : $z - i\bar{z} = 0$.

2°)Au point M d'affixe $z = x + iy$ (x et y désignant des nombres réels distincts), on fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : $z' = f(z) = \dfrac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$.

a)Calculer le module de $f(i)$.

Donner un argument de $f(i)$. En déduire que $(f(i))^8$ est un nombre réel positif.

b)Résoudre l'équation $f(z) = i$.

Ecrire la solution sous forme algébrique.

3°)a)Calculer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M.

b)Déterminer et représenter dans le plan P l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

EXERCICE 2

Une unité de longueur étant choisie, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2l et AC = l où l est un réel strictement positif.
O désigne le milieu de [BC].

1°a) Construire G le barycentre de {(A;1) ; (B;1) ; (C;– 1)}.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Démontrer que A appartient à E.

2°) On désigne par H le point du plan tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Déterminer des réels a, b et c tels que H soit le barycentre de {(A;a) ; (B;b) ; (C;c)} **.** Compléter la figure .

3°) Démontrer que $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Calculer alors $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AO}$ en fonction de l.

Pour la suite de l'exercice aucune figure n'est demandée.

4°) On considère l'ensemble E_k des points M de <u>l'espace</u> tels que $(-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AO} = k$ où k est un réel.

- **a)** Déterminer l'ensemble E_0.
- **b)** Pour quelle valeur du réel k le point O est-il situé dans E_k ?
- **c)** Pour cette valeur de k préciser l'ensemble E_k obtenu.

EXERCICE 3

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur la même figure, dans un plan rapporté à un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité :4cm).

PARTIE A

On considère la fonction numérique *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\dfrac{x+2}{x} \text{ si } x \text{ appartient à }]0;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) a) *f* est-elle dérivable en 0 ?

b) En posant $h = \dfrac{2}{x}$ $(x > 0)$, trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2°) a) Pour *x* appartenant à $]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = -\dfrac{4}{x(x+2)^2}$.

b) Etudier le sens de variation de f', et trouver la limite de $f'(x)$ quand *x* tend vers +∞. En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de *f*.

3°) On appelle (C) la représentation graphique de *f* dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.

4°) Soit *u* la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ et (H) sa représentation graphique dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variation de *u*.

b) Vérifier que pour *x* appartenant à $]0;+\infty[$ on a : $f(x) - xf'(x) = u(x)$.

En déduire la position relative de (C) et de (H). tracer (H) en indiquant le point B d'abscisse 2.

c) λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $u(\lambda)$. En déduire à l'aide du tracé de (H) la détermination de la tangente à (C) au point d'abscisse λ et tracer de cette façon la tangente à (C) en A.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonction *g*, définies et dérivables sur $]0;+\infty[$ et possédant la propriété *P* suivante :

Pour tout *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x) - xg'(x) = u(x)$.

g étant une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on pose, pour tout *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x) = xG(x)$.

1°) Montrer que :*g* possède la propriété *P* si et seulement si pour tout *x* appartenant à $]0;+\infty[$, $G'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire l'ensemble (E)

PARTIE C

k étant un réel, on considère la fonction numérique f_k définie sur $[0;+\infty[$ par :

$\begin{cases} f_k(x) = f(x) + kx \text{ si } x \text{ appartient à }]0;+\infty[\\ f_k(0) = 0 \end{cases}$.

On appelle (C_k) la représentation graphique de f_k dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1°) On suppose *k* strictement positif. Donner le tableau de variation de f_k.

2°) On suppose dans cette question que *k* = -1

a) En utilisant les variations de f' obtenues dans le A2°)b), montrer que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ admet sur $[0;+\infty[$ une solution unique notée α et vérifier que $\alpha \in [0{,}3;0{,}4]$.

b) Etudier les variations de f_{-1}.(Les limites aux bornes ne sont pas demandées)

c) On note I le point de (C) d'abscisse α. Montrer que I appartient à (H)