BAC BLANC TS
ELEVES NE SUIVANT PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE MATHS

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (5 points)

Partie A : Question de cours
Soit (E) l'équation différentielle $y' = my$ où m est un réel non nul.

Prérequis : La fonction $f : x \mapsto e^{mx}$ est solution de cette équation.

Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \mapsto Ce^{mx}$ où C est une constante réelle.

Partie B
Dans une préparation biologique, la taille d'une population d'une bactérie est une fonction p du temps t en heures. Les biologistes ont constaté que la taille de cette population avait une croissance presque exponentielle au début, puis à partir d'un certain temps t_0, le nombre de bactéries stagnait autour d'une taille maximale que l'on notera $T_{\max}$.

On appelle f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{p(t)}{T_{\max}}$ sur [0 ; + ∞[.

f est solution de l'équation différentielle , notée (E1) : $y' = my(1-y)$ où m est un réel fixé, non nul, qui dépend de la population de bactéries étudiées.

1°) On suppose que pour tout réel t positif $f(t) > 0$ et on définit la fonction g sur [0 ; + ∞[par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

Prouver que f est solution de (E1) si et seulement si g est solution de (E2) : $z' = m - mz$

2°) Résoudre (E2) et en déduire les solutions de (E1)

3°) A l'instant $t = 0$, la taille initiale de la population est de 1% de la taille maximale observée.
Déterminer la fonction f solution de (E1) qui vérifie $f(0) = 0{,}01$.

4°) On suppose que m est strictement positif. Etudier la fonction f définie sur [0 ; + ∞[par

$$f(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-mt}}$$

5°) On suppose que $m = 1$. Tracer la courbe représentant f et déterminer, par le calcul, l'instant t_0 à partir duquel $f(t) \geq 0{,}99$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

On note :

- I le point d'affixe 1
- A l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle θ .
- B le symétrique du point A par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$, C l'image du point B par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

1°)a)Placer sur une figure les points I, A, B et C.

b)Donner sous forme exponentielle, les affixes des points A, B et C en fonction de θ .

c)Quelle est la nature du triangle OAB ?

2°) On pose $Z = \dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{B}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{B}}}$

a)Exprimer en fonction de θ le module et un argument de Z.

b)En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{BA}})$.

c)Pour quel réel θ le triangle ABC est-il isocèle en B ?

3°)a)Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$.

b)Déterminer θ pour que cette aire soit maximale.

4°)Déterminer en fonction de θ l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

<u>Exercice 3 (6 points)</u>

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par f_a la fonction numérique définie sur] 0 ; + ∞ [par $f_a(x) = \dfrac{\ln(ax)}{x}$ et par (C_a) sa courbe représentative dans un repère orthonormal .

1°) Pour $a = 1$, on a donc $f_1(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Etudier les variations de la fonction f_1 sur] 0 ; +∞ [.

b) Déterminer les limites de f_1 en 0 en en +∞ et construire la courbe (C_1) en prenant 2 cm pour unité graphique et en précisant le point d'intersection de (C_1) avec l'axe des abscisses.

2°) Dans cette question a est un réel quelconque strictement positif.

a)Etudier les variations de la fonction f_a .

b)Déterminer les limites de la fonction f_a en 0 et en +∞ et établir son tableau de variation.

c)Tracer sur la figure précédente la courbe (C_3) obtenue pour $a = 3$ en précisant le point d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.

3°) On appelle I_a le point de (C_a) d'abscisse 1.

a)Ecrire l'équation de la tangente (T_a) à (C_a) au point I_a .

b)Tracer (T_1) et (T_3) et déterminer leur point d'intersection.

c)Démontrer que lorsque a varie dans] 0 ; +∞ [les tangentes (T_a) passent par un point fixe dont on déterminera les coordonnées.

4°)Pour tout réel $x > 0$, on note M et N les points de (C_1) et (C_3) d'abscisse x et on désigne par G le barycentre des points (M, 1) et (N, $-\dfrac{1}{2}$).

a)Calculer les coordonnées de G en fonction de x.

b)Démontrer que l'ensemble des points G lorsque x varie dans]0 ; +∞ [est contenu dans une courbe (C_a) que l'on déterminera.

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM).
A chaque proposition est affecté un certain nombre de points. Pour chaque proposition, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces propositions. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chaque question, au moins une des 4 propositions est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le candidat indiquera sa réponse en cochant la case correspondante.

Question 1 :
Soient les points A(0 ; 0 ; -3), B(-1 ; -1 ; -2), C(1 ; 1 ; -4) et H(0 ; -3 ; -1)

Vrai	Faux	
☐	☐	(a) A , B , C sont alignés
☐	☐	(b) C est le barycentre de $\{(A,2),\ (B,-1)\}$
☐	☐	(c) H est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,3)\}$
☐	☐	(d) A , B , C , H sont coplanaires

Question 2 :
(D) est la droite passant par H(0 ; -3 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et (P) le plan d'équation $x+2y+3z+9=0$

Vrai	Faux	
☐	☐	(a) (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2k \\ y=-3+2k \\ z=-1-2k \end{cases}$ avec $k\in IR$
☐	☐	(b) (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2 \\ y=-3k+2 \\ z=-k-2 \end{cases}$ avec $k\in IR$
☐	☐	(c) Le point C (défini à la question 1) est situé sur la droite (D)
☐	☐	(d) La droite (D) est incluse dans (P)

Question 3 :
On désigne par (S) l'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

Vrai	Faux	
☐	☐	(a) (S) est une sphère de centre I(-2 ; 2 ; -4)
☐	☐	(b) (S) est la sphère de centre Ω(1 ; -1 ; 2) et de rayon $R=4$
☐	☐	(c) (S) est la sphère de diamètre [MN] avec M(1 ; -1 ; 6) et N(1 ; -1 ; -2)
☐	☐	(d) Le plan (P) défini à la question 2 et l'ensemble (S) sont sécants

Question 4 :
Soit (Q) le plan de direction $(\vec{i},\vec{k})$ passant par H(0 ; -3 ; -1)

Vrai	Faux	
☐	☐	(a) (Q) a pour vecteur normal $\vec{j}$
☐	☐	(b) (Q) a pour équation $x+y+z+4=0$
☐	☐	(c) (Q) est perpendiculaire au plan (P) d'équation : $x+2y+3z+9=0$
☐	☐	(d) (Q) coupe (P) suivant une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3k-3 \\ y=-3 \\ z=-k \end{cases}$ avec $k\in IR$

Exercice 1 (5 points)

Partie A : Question de cours

Soit (E) l'équation différentielle $y' = my$ où m est un réel non nul.

Soit f une solution de cette équation différentielle.

Soit alors g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) \times e^{-mx}$

On a alors : $g'(x) = f'(x)\, e^{-mx} - - m\, e^{-mx} \times f(x) = e^{-mx}\,(f'(x) - m\, f(x)) = 0$ donc g est une fonction constante donc $f(x) \times e^{-mx} = C$ donc f est de la forme : $x \longmapsto C\, e^{mx}$

Partie B

1° $\forall\, t \in [\,0\,, +\infty\,[\, : g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ et $g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2}$

Pour tout réel t de [0 ; + ∞ [on sait que f(t) dif0 et on a donc :

$f'(t) = m\, f(t)\,(1 - f(t)) \Leftrightarrow \dfrac{f'(t)}{(f(t))^2} = \dfrac{m}{f(t)} - m \Leftrightarrow -\,g'(t) = m\, g(t) - m \Leftrightarrow g'(t) = m - m\, g(t).$

On a bien f solution de $y' = m\, y\,(1 - y)$ si et seulement si g solution de $z' = m - m\, z$.

2° On sait que les fonctions solutions de l'équation différentielle $Y' = aY + b$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x \longmapsto k\, e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$.)

Les solutions de (E_2) sont donc de la forme : $t \longmapsto C\, e^{-mt} - \dfrac{m}{-m}$ c'est à dire de la forme $t \longmapsto C\, e^{-mt} + 1$.

Les solution de (E_1) sont donc de la forme $t \longmapsto \dfrac{1}{C\, e^{-mt} + 1}$

Remarque : pour que f soit définie sur [0 ; + ∞ [il suffit de prendre $C \geq 0$. la fonction f est alors positive.

3° f solution de (E_1) donc pour tout réel t de [0 ; + ∞ [$f(t) = \dfrac{1}{C\, e^{-mt} + 1}$

$f(0) = 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{C\, e^{0} + 1} = 0{,}01 \Leftrightarrow 1 = 0{,}01\,(C + 1) \Leftrightarrow C = 100 - 1 \Leftrightarrow C = 99.$

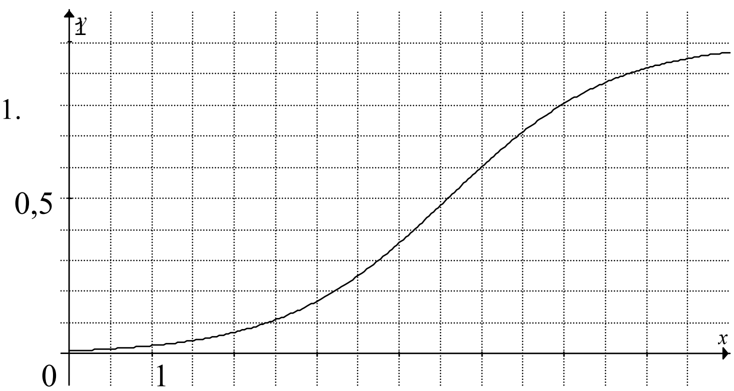
f est définie sur [0 ; + ∞ [par $f(t) = \dfrac{1}{1 + 99\, e^{-mt}}$

x	0	+∞
signe de f	+	
f	0,01 ↗	+ ∞

4° $f(t) = \dfrac{1}{1 + 99\, e^{-mt}}$ et $f'(t) = -\dfrac{-\,99\, m\, e^{-mt}}{(1 + 99\, e^{-mt})^2} > 0 \quad (m > 0)$

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$f(0) = 0{,}01$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + 99\, e^{x}} = \dfrac{1}{1 + 99 \times 0} = 1.$



5° $m = 1$ et $f(t) = \dfrac{1}{1 + 99\, e^{-t}}$

$f(t) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1 + 99\, e^{-t}} \geq \dfrac{99}{100} \Leftrightarrow 100 \geq 99\,(1 + 99\, e^{-t})$

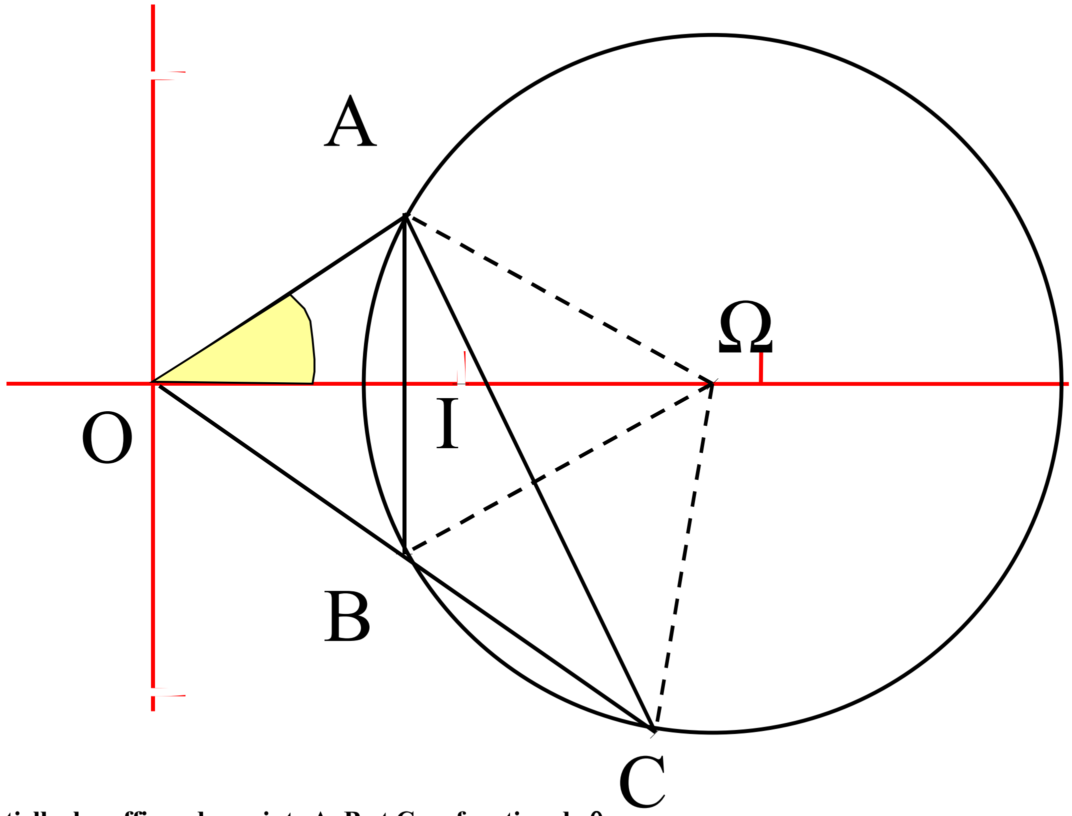
$\Leftrightarrow 100 \geq 99 + \dfrac{9801}{e^{t}} \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{9801}{e^{t}} \Leftrightarrow e^{t} \geq 9801 \Leftrightarrow t \leq \ln 9801.$ $t_0 \approx 9{,}2$.

Au bout d'environ 9,2 s le nombre de bactéries de la préparation stagne autour de la valeur maximale (entre 0,99 T_{max} et T_{max}.

<u>Exercice 2 (5 points)</u> Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ On note • I le point d'affixe 1 •A l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle θ • B le symétrique du point A par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$, • C l'image du point B par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

1°)a)Placer sur une figure les points I, A, B et C.



b)Donner sous forme exponentielle, les affixes des points A, B et C en fonction de θ .

$z_A = e^{i\theta}$ $z_I = e^{i\theta}$, $z_B = e^{-i\theta}$ et $z_C = 2\, z_B = 2\, e^{-i\theta}$

c)Quelle est la nature du triangle OAB ?

OA = OB = 1 donc le triangle OAB est isocèle en O.

2°) On pose $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

a)Exprimer en fonction de θ le module et un argument de *Z*.

$Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\, e^{-i\theta} - e^{-i\theta}} = \dfrac{2\, i \sin\theta}{e^{-i\theta}} = 2\, i \sin\theta\, e^{i\theta}$.

$|\, Z \,| = |\, 2 \,| \times |\, i \,| \times |\, e^{i\theta} \,| \times |\sin\theta\,| = 2 \sin\theta > 0$ car $\theta \in \left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$

$\arg Z = \arg(2) + \arg(i) + \arg e^{i\theta} = 0 + \frac{\pi}{2} + \theta$

b)En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BA})$.

$\arg Z = (\overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BA}) = \theta + \frac{\pi}{2}$

c)Pour quel réel θ le triangle ABC est-il isocèle en B ?

$\dfrac{BA}{BC} = 2 \sin\theta$ ABC est isocèle en B si et seulement si $\dfrac{BA}{BC} = 1$ c'est à dire $2 \sin\theta = 1$ c'est à dire $\theta = \frac{\pi}{4}$

variante : $\overrightarrow{OC} = 2\, \overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$ donc OB = BC = 1. ABC isocèle en B si et seulement si AB = BC c'est à dire AB = 1 c'est à dire OAB équilatéral c'est à dire $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ Comme $\widehat{AOB} = 2\,\theta$ on a : ABC isocèle en B si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}$

3°)a)Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\sin(2\,\theta)$.

Aire ABC $= \frac{1}{2}\,BA \times BC \times \sin \widehat{ABC}$. On a : AB = 2 y_A = 2 sin θ

$\frac{BA}{BC} =$ donc BA = 2 BC donc BA = 2 sin θ et BC = son θ

$\arg Z = (\overrightarrow{BC}\,,\,\overrightarrow{BA}) = \theta + \frac{\pi}{2}$ donc $\sin \widehat{ABC} = \left| \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \cos\theta$ car $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

On a donc Aire ABC $= \frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times \cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\,\theta$

b)Déterminer θ pour que cette aire soit maximale.

$\theta \longmapsto \frac{1}{2}\sin 2\,\theta$ est croissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,,0\right]$ L'aire de ABC est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$

4°)Déterminer en fonction de θ l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Ω est sur la médiatrice de [AB] donc $y_\Omega = 0$.

$\Omega\,(x\,,0)$ $\Omega B = \Omega C \Leftrightarrow |\,x - e^{-i\theta}\,| = |\,x - 2\,e^{-i\theta}\,| \Leftrightarrow (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta$

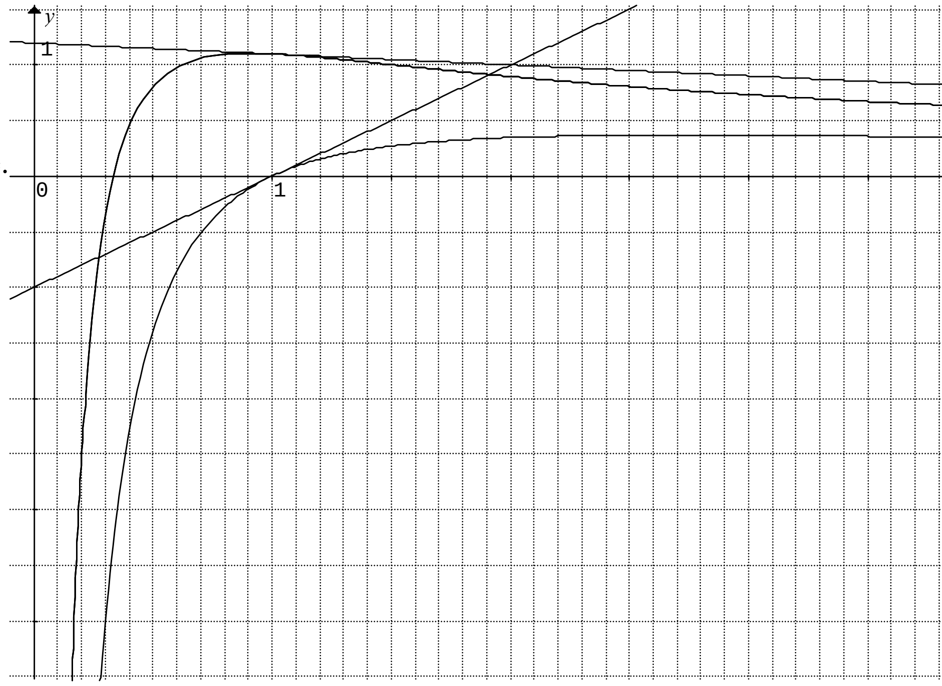
$\Leftrightarrow x^2 - 2\,x\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = x^2 - 4\,x\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta \Leftrightarrow -2\,x\cos\theta + 1 = -4\,x\cos\theta + 4$

$\Leftrightarrow 2\,x\cos\theta = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2\cos\theta}$. $\Omega\left(\frac{3}{2\cos\theta}\,,0\right)$

Exercice 3 1° $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

a) $f_1'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f_1'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e.$



x	0		e		$+\infty$
signe de f		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	1/e	↘	0

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \times \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln (a\,x)}{a\,x} \times a = 0.$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2° a) $f_a'(x) = \dfrac{\frac{a}{a\,x} \times x - 1 \times \ln (a\,x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln (a\,x)}{x^2}$

x	0		e/a		$+\infty$
signe de f		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	a/e	↘	0

$f_a'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln (a\,x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln (a\,x) \leq 1 \Leftrightarrow a\,x \leq e$

$f_a\left(\dfrac{a}{e}\right) = \dfrac{\ln\left(a \times \frac{e}{a}\right)}{\frac{e}{a}} = \dfrac{a}{e}.$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln (a\,x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (a\,x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \times \ln (a\,x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln (a\,x)}{x} = 0.$

3° a) $f_a(1) = \ln a \quad f_a'(1) = 1 - \ln a$

$y = \ln a + (1 - \ln a)(x - 1) \Leftrightarrow y = \ln a + (1 - \ln a)\,x - 1 + \ln a \Leftrightarrow \boxed{y = (1 - \ln a)\,x + 2 \ln a - 1}$

b) T_1 : $\boxed{y = x - 1}$ et T_3 : $\boxed{y = (1 - \ln 3)\,x + 2 \ln 3 - 1}$

$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x - x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = x - x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 0 = -x \ln 3 + 2 \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}}$

c) $\ln a + (1 - \ln a) \times (2 - 1) = \ln a + 1 - \ln a = 1$. le point I(2 ; 1) appartient à toutes les droites T_a

4° G barycentre des points (M, 1) et (N, $\frac{-1}{2}$).

$M\left(x, \dfrac{\ln x}{x}\right)$ et $N\left(x, \dfrac{\ln 3x}{x}\right)$ $x_G = \dfrac{x - \frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}} = x$ et $y_G = \dfrac{\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\ln 3x}{x}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{2 \ln x - \ln 3 - \ln x}{2x}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln x - \ln 3}{x}$

$y_G = \dfrac{\ln \frac{x_G}{3}}{x}$ donc $G \in \mathscr{C}_a$ pour $a = \dfrac{1}{3}$

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM).
A chaque proposition est affecté un certain nombre de points. Pour chaque proposition, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces propositions. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chaque question, au moins une des 4 propositions est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le candidat indiquera sa réponse en cochant la case correspondante.

<u>Question 1 :</u>

Soient les points A(0 ; 0 ; -3), B(-1 ; -1 ; -2), C(1 ; 1 ; -4) et H.(0 ; -3 ; -1)

Vrai	Faux	
☒		(e) A , B , C sont alignés
☒		(f) C est le barycentre de $\{(A,2),\ (B,-1)\}$
	☒	(g) H est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,3)\}$
☒		(h) A , B , C , H sont coplanaires

<u>Question 2 :</u>

(D) est la droite passant par H(0 ; -3 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et (P) le plan d'équation $x+2y+3z+9=0$

Vrai	Faux	
☒		(e) (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2k \\ y=-3+2k \\ z=-1-2k \end{cases}$ avec $k\in IR$
	☒	(f) (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2 \\ y=-3k+2 \\ z=-k-2 \end{cases}$ avec $k\in IR$
	☒	(g) Le point C (défini à la question 1) est situé sur la droite (D)
☒		(h) La droite (D) est incluse dans (P)

<u>Question 3 :</u>

On désigne par (S) l'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

Vrai	Faux	
	☒	(e) (S) est une sphère de centre I(-2 ; 2 ; -4)
☒		(f) (S) est la sphère de centre Ω(1 ; -1 ; 2) et de rayon $R=4$
☒		(g) (S) est la sphère de diamètre [MN] avec M(1 ; -1 ; 6) et N(1 ; -1 ; -2)
☒		(h) Le plan (P) défini à la question 2 et l'ensemble (S) sont sécants

<u>Question 4 :</u>

Soit (Q) le plan de direction $(\vec{i},\vec{k})$ passant par H(0 ; -3 ; -1)

Vrai	Faux	
☒		(a) (Q) a pour vecteur normal $\vec{j}$
	☒	(b) (Q) a pour équation $x+y+z+4=0$
	☒	(c) (Q) est perpendiculaire au plan (P) d'équation : $x+2y+3z+9=0$
☒		(d) (Q) coupe (P) suivant une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3k-3 \\ y=-3 \\ z=-k \end{cases}$ avec $k\in IR$