Exercice 1 4 points

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels
- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact,
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée,
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1° Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.
On note I l'événement : «l'emballage est intact» et C l'événement : « au moins une gaufrette est cassée».
a) Calculer la probabilité de I.
b) On considère les événements suivants
E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
Exprimer E et F en fonction de I, $\overline{I}$ (événement contraire de I) et $\overline{C}$ (événement contraire de C). Calculer alors les probabilités de E et de F.
En déduire la probabilité de $\overline{C}$ (événement contraire de C) puis celle de C.

2° Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.
Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact? qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

Exercice 2 5 points

1° Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2° Soit K, L, M les points d'affixes respectives

$$z_K = 1 + i \ ; \ z_L = 1 - i \ ; \ z_M = -i\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 4 cm.
On complétera la figure dans les questions suivantes.
3° a) On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe Z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
b) La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.
Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.
c) La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 2 i transforme le point M en le point D et le point N en le point B. Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.
4° a) Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].
b) Montrer que : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z} = i$.
c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

$\boxed{\text{Problème}}$ 11 points

L'objet du problème est d'étudier une fonction f, puis d'examiner des intégrales qui en sont issues. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

1° a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ;+\infty[$,on a :

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x}).$$

En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de (C) et (Δ).

2° Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3° Tracer la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})\, dt.$$

On ne cherchera pas à calculer F(x).

1° Soit n un entier naturel. En utilisant la question 1° de la partie A, donner une interprétation géométrique de F(n).

2° Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3° Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a : $\dfrac{a}{a+1} \le \ln(1 + a) \le a$.

On pourra étudier les variations des fonctions h et g définies par :

$h(x) = \ln(1 + x) - \dfrac{x}{x+1}$ et $g(x) = \ln(1 + x) - x$

4° Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3° : $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}\, dt \le F(x) \le \int_0^x e^{-2t}\, dt$

puis : $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \le F(x) \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

5° On admet que la limite de F(x) , lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I.

Etablir que $\dfrac{1}{2}\ln 2 \le I \le \dfrac{1}{2}$.

6° Pour tout entier naturel n, on pose : $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\, dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\ln(1 + e^{-2(n+1)}) \le U_n \le \ln(1 + e^{-2n})$$

(On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$).

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n).

7° Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n.

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.