BAC BLANC TS
ELEVES NE SUIVANT PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE MATHS

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 (5 points)

Partie A

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$. Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2) Donner la valeur exacte de $(z')^{2006}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique : 2 cm).

1) Montrer que les points A d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2)a) Question de cours

Démontrer que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$.

b) On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$. Construire les points O' et B' et calculer leurs affixes.

3. Soit I le milieu du segment [OB].

a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?

b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ est égale à $3\sqrt{3}-\mathrm{i}$

c) La conjecture émise à la question **a.** est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = \ln(1+e^{-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1°) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Etudier le sens de variation de *f* et dresser le tableau de variations

3°) Montrer que pour tout réel *x*, $f(x) = -x + \ln(1+e^{x})$. Montrer que (C) admet en $-\infty$ une asymptote (D)d'équation y = -x

4°) Tracer (C) et (D) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(On rappelle que l'unité graphique est 4 cm)

5°) Soient *g* et *h* les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$ et $h(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{1}{2}t^2$.

a) Etudier le sens de variation de *g* et de *h*

b) En déduire que pour tout nombre réel positif t : $t - \dfrac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$.

6°) n étant un entier naturel non nul on pose $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

a) A l'aide du 5°) donner un encadrement de *f(n)*

b) Montrer que $\dfrac{1-e^{-n}}{e-1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{e-1}$.

c) Montrer que S_n est croissante et majorée par $\dfrac{1}{e-1}$

7°) Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de sa limite ℓ.

Exercice 3 (5 points)

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0\ ;+\infty[$ vérifiant la condition :

(1) Pour tout réel x de $[0\ ;+\infty[$, $f'(x)f(x) = 1$ et $f(0)=1$

1) On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1)

La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction f. On choisit le pas h=0.1

Les coordonnées (x_n , y_n) des points M_n obtenues en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient $x_0=0$, $y_0=1$ et $x_{n+1}= x_n + 0.1$ et $y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.1}{y_n}$

a) Expliquer pourquoi $y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.1}{y_n}$

b) Montrer par récurrence que la suite (y_n) est strictement positive

2) On se propose de démontrer qu'une fonction f vérifiant (1) est strictement positive sur $[0\ ;+\infty[$

a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0\ ;+\infty[$

b) On suppose que la fonction f vérifie (1) et qu'il existe un réel α strictement positif tel que $f(\alpha)<0$. En déduire que l'équation $f(x) =0$ admet au moins une solution dans $[0, \alpha]$

c) Conclure

3) Soit f une fonction vérifiant (1) et g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x) =(f(x))^2-2x$

a) Calculer $g'(x)$.En déduire que g est constante et déterminer sa valeur.

b) Déterminer alors l'expression de $f(x)$.

c) Avec un tableur on a obtenu les valeurs numériques suivantes. Que peut on observer concernant les réels y_n et $f(x_n)$?

$x_n =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_n =$	1	1,1	1,1909	1,2749	1,3533	1,4272	1,4973	1,5641	1,628	1,6894	1,7486
$f(x_n)=$	1	1,0954	1,1832	1,2649	1,3416	1,4142	1,4832	1,5492	1,6125	1,6733	1,7321

4) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2\,U_n + 1} \end{cases}$.

a) Sur la feuille annexe on a tracé la courbe C représentant la fonction f définie sur $[\,0 , +\infty\,[$ par $f(x) = \sqrt{2\,x + 1}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ainsi que la droite D d'équation $y = x$. (unité graphique :4 cm).
A l'aide de C et de D , construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (U_n).

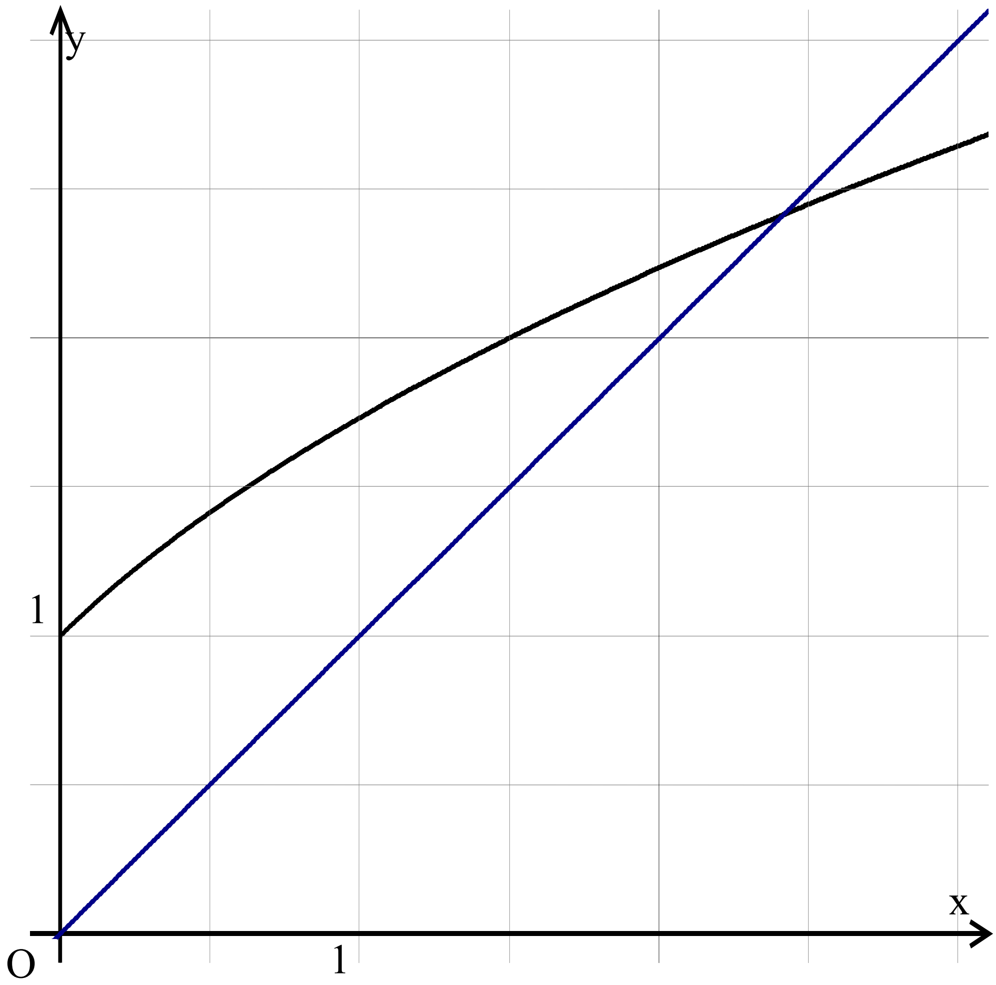
b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le U_n \le 3$.

c) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle converge.

d) On note ℓ la limite de la suite (U_n). On rappelle que $f(\ell) = \ell$, en déduire la valeur de ℓ .

Cette feuille est à rendre avec votre copie

Nom : ……………………   Prénom : ……………………………..



Exercice 4 (5points)

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM).
A chaque proposition est affecté un certain nombre de points. Pour chaque proposition, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Pour chaque question, au moins une des 4 propositions est exacte et aucune justification n'est demandée.

Question 1

Un échiquier rectangulaire contient n lignes et p colonnes donc n p cases carrées avec $n < p$.
On dispose de n jetons identiques.

1. Le nombre de façons de placer ces n jetons est égale à :

Vrai	Faux	
☐	☐	a): $\binom{np}{n}$
☐	☐	b) $\dfrac{p\,!}{(n\,p-n)\,!}$

2. Le nombre de façons de placer ces n jetons de telle sorte qu'il y ait 1 jeton par ligne est égale à :

☐	☐	a) p^n
☐	☐	b) n !

Question 2

Les résultats d'une enquête sur l'audience de trois hebdomadaires a, b et c sont présentés dans le tableau ci-dessous où A, B et C désignent respectivement l'ensemble des lecteurs de a, b et c.

A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
210	180	130	100	50	70	20

Vrai	Faux	
☐	☐	a) 360 lecteurs lisent au moins un de ces hebdomadaires.
		On interroge au hasard un de ces lecteurs
☐	☐	b) La probabilité que ce lecteur lise seulement l'hebdomadaire a est $\frac{1}{4}$
☐	☐	c) La probabilité que ce lecteur lise au moins deux hebdomadaires est $\frac{11}{18}$.
☐	☐	d) La probabilité que ce lecteur lise l'hebdomadaire a sachant qu'il lit au moins deux hebdomadaires est $\frac{13}{18}$.

Question 3

Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

1. La probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe est égale à

Vrai	Faux	
☐	☐	a) $\frac{1}{120}$
☐	☐	b) $\frac{3}{40}$

2. La probabilité pour un individu non vacciné de cette population de contracter la grippe est égale à

Vrai	Faux	
☐	☐	a) $\frac{7}{40}$
☐	☐	b) $\frac{27}{80}$

Question 4

Des objets issus d'une chaîne de fabrication peuvent avoir deux défauts a et b.
La probabilité de l'événement A, avoir le défaut a, est égale à 0,4.
La probabilité de l'événement B, avoir le défaut b, est égale à 0,3.
Si un objet n'a pas le défaut a, la probabilité pour qu'il ait le défaut b est 0,3.

1. La probabilité qu'un objet ait le défaut a sachant qu'il a le défaut b est

Vrai	Faux	
☐	☐	a) 0,4
☐	☐	b) 0,3

2.

☐	☐	c) les événements A et B sont indépendants

3. La probabilité qu'un objet ait au moins un défaut est égale à :

☐	☐	d) 0,7

Partie A1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$. Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

$\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12$. $z' = \dfrac{2 + 2\,i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} = 2\,e^{i\pi/3}$ et $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\,\pi/3}$

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2006}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

$(z')^{2006} = (2\,e^{i\pi/3})^{2006} = 2^{2006}\,e^{2006i\pi/3} = 2^{2006}\,e^{668i\pi + 2i\,\pi/3} = 2^{2006}\,e^{2i\pi/3} = -2^{2005} + i\,2^{2005}\sqrt{3}$

Partie B Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique : 2 cm). Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B

$|\,1 + i\sqrt{3}\,| = |\,1 - i\sqrt{3}\,| = 2$? donc A et B sont sur le cercle de centre O de rayon 2.

2.a. Question de cours Démontrer que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'. Soit r la rotation de centre Ω d'angle θ.

- si $M \neq \Omega$: $M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z - \omega| = |z' - \omega| \\ \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z - \omega}{z' - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z - \omega}{z' - \omega}\right) = \theta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z - \omega}{z' - \omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}\ (z - \omega)$

- si $M = \Omega$: z' = omega et on a bien : $z' = \omega \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}\ (z - \omega)$

2.b. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$. Construire les points O' et B' et calculer leurs affixes

$z_{O'} - z_A = e^{-i\,\pi/2}\,(z_O - z_A)$ donc $z_{O'} = z_A - i\,(z_O - z_A) = 1 + i\sqrt{3} + i\,(1 + i\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + i\,(1 + \sqrt{3})$

$z_{B'} - z_A = e^{i\,\pi/2}\,(z_B - z_A)$ donc $z_{B'} = z_A + i\,(z_B - z_A) = 1 + i\sqrt{3} + i\,(1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

3. Soit I le milieu du segment [OB].3. a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO'B' ?

(AI) est la hauteur issue de A

3. b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.

$z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = \dfrac{z_O + z_B}{2} - z_A = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

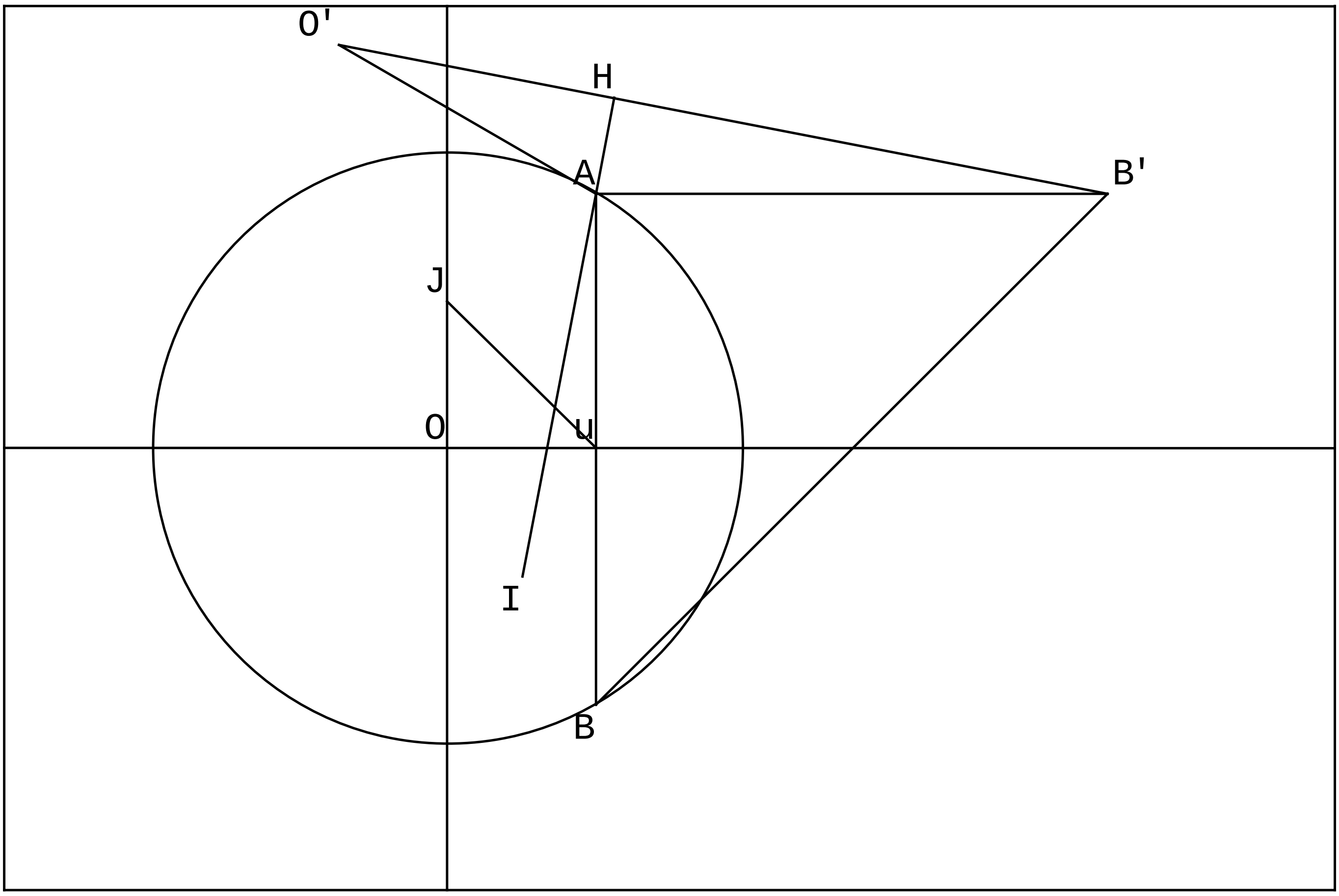
$z_{\overrightarrow{O'B'}} = z_{B'} - z_{O'} = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3} + i\,(1 + \sqrt{3})) = 1 + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - i - i\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - i$

3. c. La conjecture émise à la question a. est-elle vraie ? Justifier

$$\frac{z_I - z_A}{z_{B'} - z_{O'}} = \frac{-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3} - i} = \frac{1}{2} \times \frac{i\,(-1 - 3\,i\sqrt{3})}{3\,i\sqrt{3} + 1} = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{(-1 - 3\,i\sqrt{3})\,(1 - 3\,i\sqrt{3})}{9 \times 3 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{-1 + 3\,i\sqrt{3} - 3\,i\sqrt{3} - 9 \times 3}{28} = -\frac{i}{2}$$

Variante $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{O'B'} = -\dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{3} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times 1 = 0$. donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{O'B'}$


O'
H
A
B'
J
O
u
I
B

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).1°) Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$

On pose $X = e^{-x}$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(1 + X) = +\infty$

On pose $X = e^{-x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(1 + X) = 0$.

2°) Etudier le sens de variation de *f* et dresser le tableau de variations

la fonction $x \longmapsto 1 + e^{-x}$ est la somme de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $1 + e^{-x} > 0$ donc la fonction f composée de la fonction ln avec la fonction $x \longmapsto 1 + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3°) Montrer que pour tout réel *x*, $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$. En déduire que (C) admet en $-\infty$ une asymptote (D)d'équation $y = -x$

$\ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x}\right) = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = -x + \ln(1 + e^x)$.

On pose $X = e^x$. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(1 + X) = \ln 1 = 0$.

$f(x) = -x + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à (C)

4°) Tracer (C) et (D) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (On rappelle que l'unité graphique est 4 cm)

5°) Soient *g* et *h* les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$ et $h(t) = \ln(1 + t) - t + \dfrac{t^2}{2}$

c) Etudier le sens de variation de *g* et de *h*

$g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{1 - 1 - t}{1 + t} = -\dfrac{t}{1+t} < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(0) = 0$

$h'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 + t = \dfrac{1 + (1+t)(-1+t)}{1+t} = \dfrac{1 + t + t^2 - 1}{1 + t} = \dfrac{t^2}{1+t} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(0) = 0$.

x	0	$+\infty$
signe de g '	–	
g	0 ↘	

x	0	$+\infty$
signe de h '		
h	0 ↗	

c) En déduire que pour tout nombre réel positif t : $t - \dfrac{1}{2}t^2 \leq \ln(1 + t) \leq t$

D'après les variations de g et de h pour tout réel t, on a :

$h(t) \geq h\text{-}(0)$ donc $0 \leq \ln(1 + t) - t + \dfrac{t^2}{2}$ donc $t - \dfrac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t)$

$g(t) \leq g(0)$ donc $\ln(1 + t) - t \leq 0$ donc $\ln(1 + t) \leq t$

6°) n étant un entier naturel non nul on pose $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$. a) A l'aide du 5° donner un encadrement de *f(n)*

On pose $t = e^{-n} > 0$ on a donc : $e^{-n} - \dfrac{1}{2}(e^{-n})^2 \leq \ln(1 + e^{-n}) \leq e^{-n}$ c'est à dire $e^{-n} - \dfrac{e^{-2n}}{2} \leq f(n) \leq e^{-n}$

b) Montrer que $\dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \leq S_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$.

$\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-i} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2i} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f(i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} e^{-i}$ En utilisant les formules de somme de suite géométrique on obtient :

$\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-i} = e^{-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} e^{-i} = \dfrac{1}{e}\dfrac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} = \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2i} = e^{-2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} e^{-2i} = \dfrac{1}{e^2} \times \dfrac{1 - e^{-2n}}{1 - e^{-2}} = \dfrac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1}$

donc $\dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \leq S_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$

c) Montrer que S_n est croissante et majorée par $\dfrac{1}{e-1}$.

$S_{n+1} - S_n = f(n + 1) \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, $e^{-n} > 0$ donc $1 - e^{-n} < 1$ donc $\dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} \leq \dfrac{1}{e - 1}$ car $e - 1 > 0$.

On a donc pour tout entier naturel n : $S_n \leq \dfrac{1}{e - 1}$

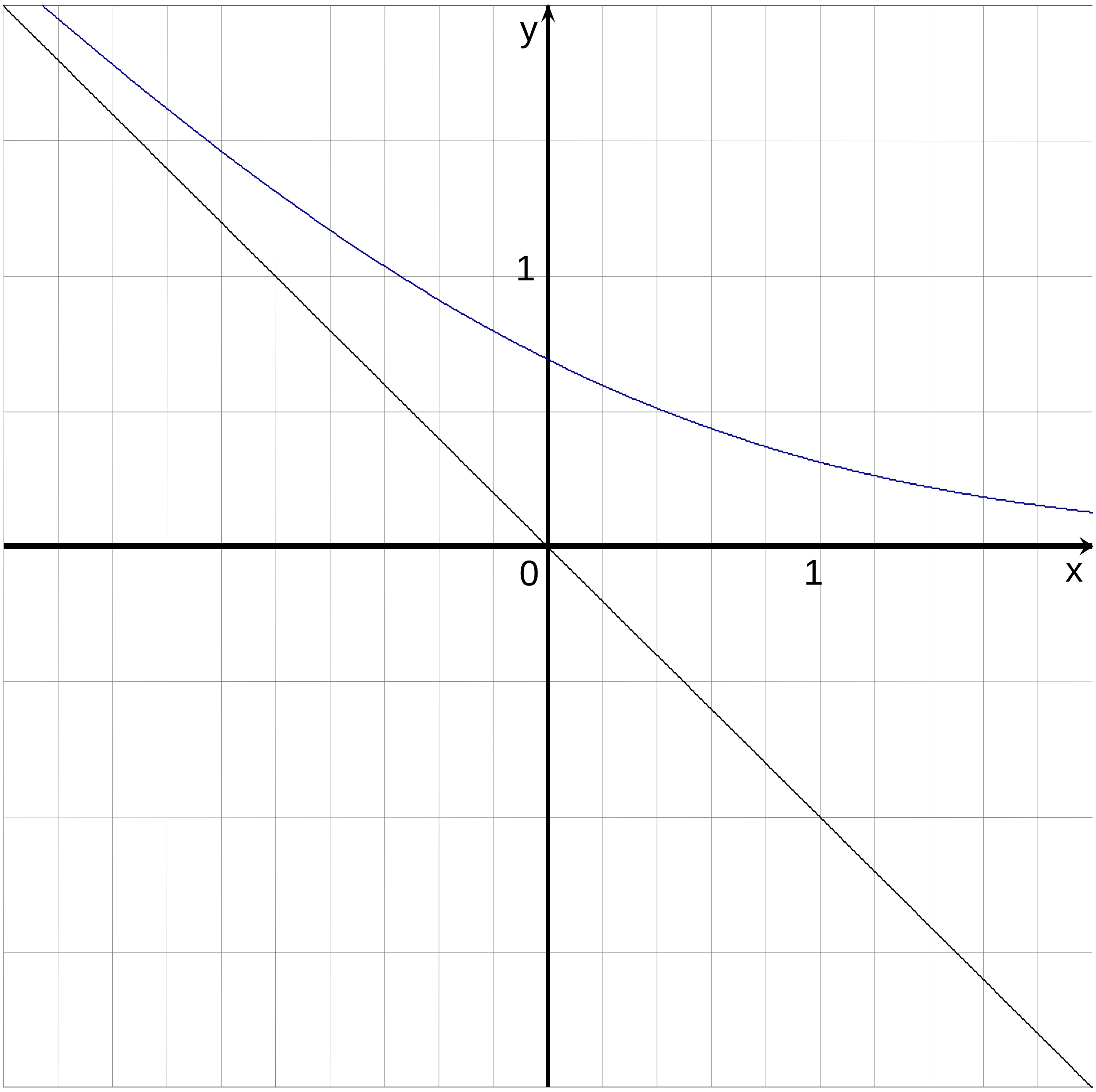
7°) Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de sa limite ℓ.

La suite (S_n) est donc croissante et elle est majorée elle est donc convergente.

$\dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1} \leq S_n \leq \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - e^{-2n}}{e^2 - 1}\right) = \dfrac{1}{e - 1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^2 - 1} \approx 0{,}503$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-n}}{e - 1} = \dfrac{1}{e - 1} \approx 0{,}58$

D'après les théorème de comparaison on a :$0{,}5 \leq \dfrac{2(e + 1)}{2(e^2 - 1)} \leq \ell \leq \dfrac{1}{e - 1} \leq 0{,}6$.



y
1
0
1
x

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur [0 ; +∞[vérifiant la condition :

(1) « Pour tout x de [0 ; +∞[, $f'(x)\,f(x) = 1$ et $f(0)=1$ » 1° On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1) La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction f. On choisit le pas h=0.1 Les coordonnées (x_n , y_n) des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,$x_{n+1} = x_n + 0.1$ et $y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{y_n}$ a) Expliquer pourquoi $y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{y_n}$

On sait que si h est voisin de zéro alors $f(\alpha + h) \approx f(x_0) + h \times f'(\alpha)$

On a donc $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + 0{,}1 \times f'(x_n)$

$y_{n+1} \approx f(x_{n+1})$, $y_n \approx f(x_n)$ et $f'(x_n) = \frac{1}{f(x_n)} \approx \frac{1}{y_n}$ donc $y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \times \frac{1}{y_n} = y_n + \frac{0{,}1}{y_n}$

b) Démontrer, par récurrence que la suite (y_n) est toujours positive

Initialisation $y_0 = f(0) = 1 > 0$

Hérédité : Si $y_n > 0$ alors comme $y_{n+1} = y_n + \frac{0{,}1}{y_n}$ on peut dire que y_{n+1} est la somme de deux réels strictement positifs et y_n est donc strictement positif.

Conclusion si n = 0 alors $y_n > 0$. Si $y_n > 0$ alors $y_{n+1} > 0$ On peut donc dire que pour tout entier naturel n, $y_n > 0$.

2° On se propose de démontrer qu'une fonction f vérifiant (1) est strictement positive sur [0 ; +∞[

a) Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur [0 ; +∞[

Pour tout réel x de] 0 , + ∞ [, $f(x) \times f'(x) = 1$ donc $f(x) \times f'(x) \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$

b) On suppose que la fonction f vérifie (1) et qu'il existe un réel α strictement positif tel que f(α)<0. En déduire que l'équation f(x) =0 admet au moins une solution dans [0, α]

f est continue sur [0 , α] et $f(\alpha) < 0 < f(0)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires on peut dire que l'équation f(x) = 0 admet une solution dans [0 , α]

b) Conclure

S'il existe α tel que f(a) < 0 alors il existe une solution à l'équation f(x) = 0 ce qui est impossible. On peut donc dire que pour tout réel x de [0 , + ∞ [$f(x) \geq 0$.

3) Soit f une fonction vérifiant (1) et g la fonction définie sur [0 ; +∞[par $g(x) =(f(x))^2 - 2x$ a) Calculer g'(x).En déduire que g est constante et déterminer sa valeur.

$g(x) = (f(x))^2 - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 2 f'(x) \times f(x) - 2 = 2 - 2 = 0$. g' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. $g(0) = (f(0))^2 - 2 \times 0 = 1$ donc pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, g(x) = 1.

b) Déterminer alors l'expression de f(x).

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $(f(x))^2 - 2x = 1$ donc $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

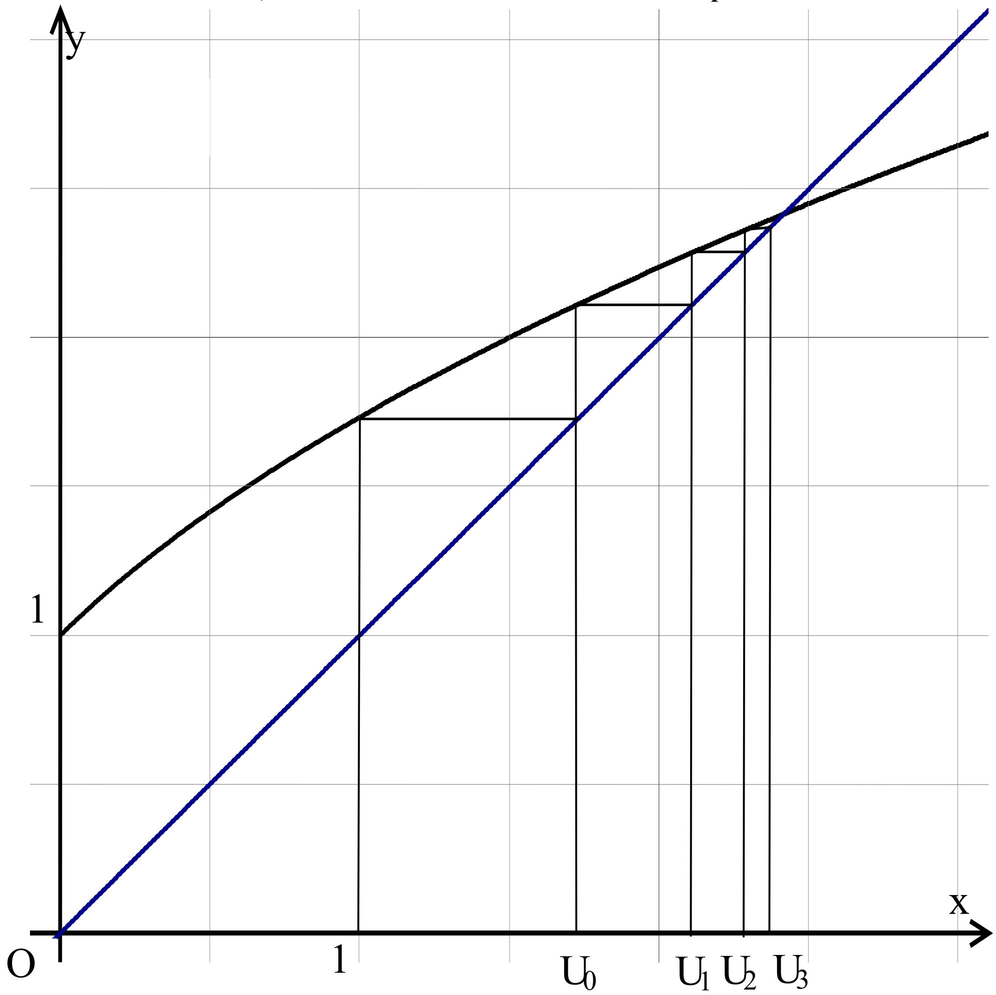
c) Avec un tableur on a obtenu les valeurs numériques suivantes. Que peut on observer concernant les réels y_n et $f(x_n)$?

On constate que y_n est une assez bonne approximation de (x_n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	500	5000
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	4,9	49,9	499,9
y_n	1	1,1	1,191	1,275	1,353	1,427	1,497	1,564	1,628	1,689	3,305	10,050	31,641
$f(x_n)$	1	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414	1,483	1,549	1,612	1,673	3,286	10,040	31,635

4° On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2\,U_n + 1} \end{cases}$.

a) Sur la feuille annexe on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $[\,0\,, +\infty\,[$ par $f(x) = \sqrt{2\,x + 1}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = x. (unité graphique :4 cm).
A l'aide de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$, construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (U_n)



b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 3$

Initialisation : $U_0 = 1$ donc $1 \leq U_0 \leq 3$

Hérédité : si $1 \leq U_n \leq 3$ alors comme la fonction f est croissante on a $1 \leq \sqrt{2 \times 1 + 1} \leq \sqrt{2\,U_n + 1} \leq \sqrt{2 \times 3 + 1} \leq 3$
donc $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

Conclusion. On sait que $1 \leq U_0 \leq 3$ et que si $1 \leq U_n \leq 3$ alors $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

On peut dire que pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq 3$.

c) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle converge.

Initialisation. $U_1 - U_0 = \sqrt{3} - 1 \geq 0$

Hérédité : Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors $U_{n+1} \geq U_n$ alors comme la fonction f est croissante $\sqrt{2\,U_{n+1} + 1} \geq \sqrt{2\,U_n + 1}$
alors $U_{n+2} \geq U_{n+1}$

Conclusion. pour tout entier naturel n , $U_{n+1} \geq U_n$ La suite (U_n) est donc croissante.

d) On note l la limite de la suite (U_n). On rappelle que $f(l) = l$, en déduire la valeur de l.

$\sqrt{2\,\ell + 1} = \ell \Leftrightarrow 2\,\ell + 1 = \ell^2$ car tout est positif

$\Leftrightarrow \ell^2 - 2\,\ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ ou $\ell = 1 - \sqrt{2}$.

la deuxième racine ne convient pas car elle n'est pas comprise entre 1 et 3 On peut donc dire que $\ell = 1 + \sqrt{2}$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

Question 1 Un échiquier rectangulaire contient n lignes et p colonnes donc n p cases carrées avec n < p.
On dispose de n jetons identiques. Le nombre de façons de placer ces n jetons est égale à :

Vrai	Faux	
☒	☐	a): $\binom{np}{n}$
☐	☐	b) $\frac{p\,!}{(n\,p-n)\,!}$

2) Le nombre de façons de placer ces n jetons de telle sorte qu'il y ait 1 jeton par ligne est égale à :

Vrai	Faux	
☒	☐	a) p^n
☐	☐	b) n !

Question 2 Les résultats d'une enquête sur l'audience de trois hebdomadaires a, b et c sont présentés dans le tableau ci-dessous où A, B et C désignent respectivement l'ensemble des lecteurs de a, b et c.

A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
210	180	130	100	50	70	20

Vrai	Faux	
☐	☐	a) 360 lecteurs lisent au moins un de ces hebdomadaires.
		On interroge au hasard un de ces lecteurs
☒	☐	b) La probabilité que ce lecteur lise seulement l'hebdomadaire a est $\frac{1}{4}$
☐	☐	c) La probabilité que ce lecteur lise au moins deux hebdomadaires est $\frac{11}{18}$.
☒	☐	d) La probabilité que ce lecteur lise l'hebdomadaire a sachant qu'il lit au moins deux hebdomadaires est $\frac{13}{18}$.

Question 3 Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25. 1) La probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe est égale à

Vrai	Faux	
☐	☐	a) $\frac{1}{120}$
☒	☐	b) $\frac{3}{40}$

2) La probabilité pour un individu non vacciné de cette population de contracter la grippe est égale à

Vrai	Faux	
☐	☐	a) $\frac{7}{40}$
☒	☐	b) $\frac{27}{80}$

Question 4 Des objets issus d'une chaîne de fabrication peuvent avoir deux défauts a et b.

La probabilité de l'événement A, avoir le défaut a, est égale à 0,4.La probabilité de l'événement B, avoir le défaut b, est égale à 0,3. Si un objet n'a pas le défaut a, la probabilité pour qu'il ait le défaut b est 0,3.

1) La probabilité qu'un objet ait le défaut a sachant qu'il a le défaut b est

Vrai	Faux	
☒	☐	a) 0,4
☐	☐	b) 0,3

2)

☒	☐	c) les événements A et B sont indépendants

3) La probabilité qu'un objet ait au moins un défaut est égale à :

☐	☐	d) 0,7