SERIE S : EXAMEN BLANC DE MATHEMATIQUES (02/2007)

La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les calculatrices sont autorisées.

EXERCICE 1 (4 points) commun à tous les candidats :

L'objectif de cet exercice est l'étude de la désintégration d'un élément radioactif, le Thorium ^{227}, qui se désintègre en Radium ^{223}, lequel se désintègre à son tour pour donner du Radon ^{219}. A l'instant t = 0, on isole N_0 atomes de Thorium, et à cet instant (t = 0), il n'y a aucun atome de Radium. On note R(t) le nombre d'atomes de Radium ^{223} présents à l'instant t, t appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [. Les expériences réalisées ont montré que la fonction R était solution de l'équation différentielle (E) :

$$\boldsymbol{R'(t) + 0{,}062\, R(t) = 0{,}038\, N_0\, e^{-0{,}038\, t}},$$

et vérifiait donc la condition initiale $\boldsymbol{R(0) = 0}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $\boldsymbol{R'(t) + 0{,}062\, R(t) = 0}$. On notera R_k les fonctions solutions générales de (E') .

2) Montrer que la fonction R_1 définie sur [0 ; + ∞ [par $R_1(t) = \dfrac{19}{42} N_0\, e^{-0{,}038\, t}$ est une fonction solution particulière de (E).

3) On admet que les fonctions solutions générales de (E) sont définies sur [0 ; + ∞ [par $R_k(t) + R_1(t)$. Déterminer alors la fonction R, qui vérifie $R(0) = 0$.

4) On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par $f(t) = e^{-0{,}038\, t} - e^{-0{,}062\, t}$.

a) Exprimer $R(t)$ en fonction de $f(t)$.

b) Déterminer la limite de f en + ∞ .

c) Calculer la fonction dérivée f' de f .Vérifier que $f'(t) = 0{,}002\, e^{-0{,}062\, t}(31 - 19\, e^{0{,}024\, t})$.

d) Résoudre l'inéquation $31 - 19\, e^{0{,}024\, t} > 0$.
En déduire les variations de f sur [0 ; + ∞ [(on précisera la valeur exacte t_0 de t pour laquelle f atteint son maximum, et on donnera une valeur approchée de ce maximum à la précision de 10^{-3}).
En déduire les variations de la fonction R.

e) Selon vous, que se passe-t-il après l'instant t_0 ?

5) On suppose que $N_0 = 10^{12}$ .Combien y aura-t-il d'atomes de Radium ^{223} au temps $t = 15$?

EXERCICE 2 (4 points) commun à tous les candidats :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 l'autre solution.

b) Ecrire les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
Placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 sur la figure.

2) On considère l'application f qui à tout point M distinct de O et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

a) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B par *f*.
Placer ces points sur la figure.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés, et que $OM' \times OM = 1$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $|z - 2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1 - 2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right| = 2$

En déduire que $|z - 2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

b) Soit C le cercle de centre I, d'affixe 2, et de rayon 2. Montrer que [AB] est un diamètre de C.

c) Soit M un point de C distinct de O. Montrer que M' est situé sur une droite D (distincte de la droite (OM)), dont on donnera une équation. Placer le cercle C et la droite D sur la figure.

Nom ___________________________________

EXERCICE 3 (5 points), réservé aux candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Partie A : On rappelle que la fonction logarithme népérien, notée ln, définie sur $]0\,;+\infty[$ vérifie, pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démontrer que, pour tous réels a strictement positif et pour tout entier naturel n, on a : $\ln(a^n) = n \ln a$.

Partie B

*Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions sont indépendantes. Pour chaque question il y a **deux** réponses correctes. Le candidat doit cocher au plus deux cases (celles qu'il juge correctes). **Aucune justification n'est demandée**.*

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Chaque réponse exacte rapporte la moitié des points affectés ; chaque réponse fausse enlève le quart des points affectés. Cocher trois cases ou plus à une question, ou n'en cocher aucune, rapporte zéro point à cette question.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le nombre complexe $a = \dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{4}$.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, le point A_n d'affixe z_n vérifiant $\begin{cases} z_0 = 6+6\,\mathrm{i} \\ z_n = a^n\, z_0 \end{cases}$.

On pose $r_n = |z_n|$ pour $n \geq 0$.

☐ a) La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

☐ b) Lorsque n tend vers $+\infty$, les points A_n se rapprochent du point A_0.

☐ c) $\arg(z_5) = \dfrac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$.

☐ d) Pour tout entier naturel n, $\arg(z_n) = \dfrac{5n\pi}{6} \quad [2\pi]$.

2° Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $z_A = -\mathrm{i}$, $z_B = 3$, $z_C = 2+3\,\mathrm{i}$ et $z_D = -1+2\,\mathrm{i}$

On note $Z = \dfrac{z-2-3\,\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

☐ a) L'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ est le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.

☐ b) L'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ est le point d'affixe $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}\,\mathrm{i}$.

☐ c) L'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur est contenu dans un cercle de centre Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$.

☐ d) L'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit de module 1 est contenu dans une droite passant par O.

3° On considère une fonction f définie, dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+f(x)}$$

☐ a) Pour tout réel x, $0 \leq g(x) \leq 1$.

☐ b) Si, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x)$ est finie alors, quand x tend vers $+\infty$, il est possible que $g(x)$ tende vers $+\infty$.

☐ c) Si, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $g(x)$ est finie alors, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x)$ l'est aussi.

☐ d) Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors la fonction g est croissante.

4° On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété

« Pour tout réel x, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ ».

☐ a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$

☐ b) Si pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) > 1 \\ v(x) = 2\,u(x) \end{cases}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

☐ c) Si pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) > 1 \\ v(x) = 2\,u(x) \end{cases}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (v(x)-u(x)) = \ell$.

☐ d) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 2$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 3 (5 points), réservé aux candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques.

On considère les suites d'entiers naturels définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2\,x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2\,y_n + 3$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2) a) Calculer le PGCD de x_8 et x_9 , puis celui de x_{2006} et x_{2007} .
Que peut-on en déduire pour ces nombres ?

b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3) a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2\,x_n - y_n = 5$.

b) Exprimer y_n en fonction de n.

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n. Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.
En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels x_n et y_n soient premiers entre eux.

EXERCICE 4 (7 points) commun à tous les candidats :

1) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction g_n définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$g_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a) Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de g_n .
b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]\,0\,;+\infty\,[$.
On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[\,1\,;e\,]$.
c) Etudier le signe de $g_n(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;0)$.
b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.
d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3) a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.
b) Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).
d) On admet que la suite (α_n) converge. On note alors ℓ sa limite.
Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ .

4) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x\ln x - 2\,x + \dfrac{x^2}{2\,n} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction f_n est continue en 0.
b) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?
La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ?
Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f_n ?
c) Démontrer que pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$, $f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$.
Dresser alors le tableau de variation de la fonction f_n en précisant la limite de f_n en $+\infty$.
d) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on note $\mathscr{C}_n$ les courbe représentative de f_n
Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$

<u>EXERCICE 1 (4 points) commun à tous les candidats :</u> L'objectif de cet exercice est l'étude de la désintégration d'un élément radioactif, le Thorium ^{227}, qui se désintègre en Radium ^{223}, lequel se désintègre à son tour pour donner du Radon ^{219}. A l'instant t = 0, on isole N_0 atomes de Thorium, et à cet instant (t = 0), il n'y a aucun atome de Radium. On note R(t) le nombre d'atomes de Radium ^{223} présents à l'instant t, t appartenant à l'intervalle [0 ; + ∞ [. Les expériences réalisées ont montré que la fonction R était solution de l'équation différentielle (E) : $R'(t) + 0{,}062\ R(t) = 0{,}038\ N_0\ e^{-0{,}038\,t}$, et vérifiait donc la condition initiale R(0) = 0.

1° Résoudre l'équation différentielle (E') : R'(t) + 0,062 R(t) = 0. On notera R_k les fonctions solutions générales de (E') .

Les solutions de l'équation différentielle (E ') sont de la forme $x \longmapsto k\ e^{-0{,}062\,t}$

2° Montrer que la fonction R_1 définie sur [0 ; + ∞ [par $R_1(t) = \frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}038\,t}$ est une fonction solution particulière de (E).

$$R_1(t) = \frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}038\,t} \text{ donc } R_1'(t) = -\,0{,}038 \times e^{-0{,}038\,t} \times \frac{19}{12} N_0$$

$$R_1'(t) + 0{,}062\ R(t) = 0{,}062 \times \frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}038\,t} - \times 0{,}038 \times \frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}038\,t} = \frac{19}{12} N_0\ (0{,}062 - 0{,}038)\ e^{-0{,}038\,t}$$

$$= \frac{19}{12} N_0 \times 0{,}024\ e^{-0{,}038\,t} = 0{,}038\ N_0\ e^{-0{,}038\,t} \text{ donc } R_1 \text{ est bien solution de (E)}$$

3° On admet que les fonctions solutions générales de (E) sont définies sur [0 ; + ∞ [par $R_k(t) + R_1(t)$.
Déterminer alors la fonction R, qui vérifie R(0) = 0.

$$R_k(0) + R_1(0) = 0 \Leftrightarrow k\ e^0 + \frac{19}{12} N_0\ e^0 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{19}{12} N_0$$

4° On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par $f(t) = e^{-0{,}038\,t} - e^{-0{,}062\,t}$. a) Exprimer R(t) en fonction de f (t).

$$R(t) = -\frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}062\,t} + \frac{19}{12} N_0\ e^{-0{,}038\,t} = \frac{19}{12} f(t)$$

b) Déterminer la limite de f en + ∞ .

$$\lim_{t \to +\infty} -0{,}038\,t = \lim_{t \to +\infty} -0{,}062\,t = -\infty \text{ donc } \lim_{t \to +\infty} e^{-0{,}062\,t} = \lim_{t \to +\infty} e^{-0{,}038\,t} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

c) Calculer la fonction dérivée f ' de f .Vérifier que $f'(t) = 0{,}002\ e^{-0{,}062\,t}\ (31 - 19\ e^{0{,}024\,t})$.

$f'(t) = -\,0{,}038\ e^{-0{,}038\,t} + 0{,}062\ e^{-0{,}062\,t}$ et
$0{,}002\ e^{-0{,}062\,t}\ (31 - 19\ e^{0{,}024\,t}) = 31 \times 0{,}002\ e^{-0{,}062\,t} - 0{,}002 \times 19\ e^{-0{,}062\,t + 0{,}024\,t}$
$= 0{,}062\ e^{-0{,}062\,t} - 0{,}038\ e^{-0{,}038\,t} = f'(t)$

d) Résoudre l'inéquation $31 - 19\ e^{0{,}024\,t} > 0$.

$$31 - 19\ e^{0{,}024} \geq 0 \Leftrightarrow 31 \geq 19\ e^{0{,}024\,t} \Leftrightarrow e^{0{,}024\,t} \leq \frac{31}{19} \Leftrightarrow 0{,}024\,t \leq \ln\left(\frac{31}{19}\right) \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{0{,}024} \ln\left(\frac{31}{19}\right)$$

En déduire les variations de *f* sur [0 ; + ∞ [(on précisera la valeur exacte t_0 de *t* pour laquelle *f* atteint son maximum, et on donnera une valeur approchée de ce maximum à la précision de 10^{-3}). En déduire les variations de la fonction *R*.

$$t_0 = \frac{1}{0{,}024} \ln\left(\frac{31}{19}\right) \approx 20{,}398 \quad f(t_0) \approx 0{,}178$$

$$R = \frac{19}{12} f(t) \text{ et } \frac{19}{12} > 0 \text{ donc } R \text{ a les mêmes variations que } f.$$

e) Selon vous, que se passe-t-il après l'instant t_0 ?

Après l'instant t_0 le radium diminue jusqu'à disparaître.

5° On suppose que $N_0 = 10^{12}$ .Combien y aura-t-il d'atomes de Radium ^{223} au temps *t* = 15 ?

$$f(15) \times \frac{19}{12} 10^{12} \approx 2{,}7\ 10^{11}$$

EXERCICE 2 (4 points) commun à tous les candidats : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure. 1° a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.
On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 l'autre solution.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = -16$. L'équation a donc deux solutions : $z_1 = \dfrac{-(-4) + 4\,i}{2} = 2 + 2\,i$ et $z_2 = 2 - 2\,i$.

b) Ecrire les solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle. Placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 sur la figure.

$|z_1| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ et $|z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = -\dfrac{\pi}{4}$ donc $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$

2° On considère l'application f qui à tout point M distinct de O et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué de z. a) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B par *f*. Placer ces points sur la figure.

$\bar{z}_1 = 2\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$ et $\dfrac{1}{\bar{z}_1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{i\pi/4} = \dfrac{1+i}{4}$ et $\bar{z}_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ et $\dfrac{1}{\bar{z}_2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{-i\pi/4} = \dfrac{1-i}{4}$

b) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés, et que OM' × OM = 1.

$z' = \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{\bar{z} \times z} = \dfrac{1}{|z|^2} \times z$. Comme z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et z' celui du vecteur $\overrightarrow{OM}'$ on a : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{|z|^2}\,\overrightarrow{OM}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}'$ sont donc colinéaires (et de même sens) les points O, M et M' sont donc alignés.

$\mathrm{OM}' \times \mathrm{OM} = \dfrac{1}{|z|^2}\,\mathrm{OM} \times \mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{OM}^2}{|z|^2} = 1$ car $\mathrm{OM} = |z|$

3°a) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z, $|z-2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1-2\bar{z}'}{\bar{z}'}\right| = 2$

$$\bar{z}' = \overline{\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{z} \text{ donc } \left|\frac{1-2\bar{z}'}{\bar{z}'}\right| = \left|\frac{1-\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}}\right| = \left|\frac{z-2}{z} \times z\right| = |z-2|$$

On a donc $|z-2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1-2\bar{z}'}{\bar{z}'}\right| = 2$

En déduire que $|z-2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

$$\left|\frac{1-2\bar{z}'}{\bar{z}'}\right| = \left|\overline{\frac{1-2\bar{z}'}{\bar{z}'}}\right| = \left|\frac{1-2z'}{z'}\right|$$

On a donc $|z-2| = 2$ est équivalent à $\left|\dfrac{1-2z'}{z'}\right|$ qui est équivalent à $|1-2z'| = |z'|$

b) Soit *C* le cercle de centre I, d'affixe 2, et de rayon 2. Montrer que [AB] est un diamètre de *C*.

$\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2+2\,i+2-2\,i}{2} = 2$. le point I est donc bien le centre du cercle de diamètre [AB]

$AB = |2-2\,i-(2+2\,i)| = |-4\,i| = 4$ donc 2 est bien le rayon du cercle de diamètre [AB]

c) Soit M un point de *C* distinct de O. Montrer que M' est situé sur une droite *D* (distincte de la droite (OM)), dont on donnera une équation. Placer le cercle *C* et la droite *D* sur la figure.

M appartient *C* est équivalent à $|z-2| = 2$ qui est équivalent à $|1-2z'| = |z'|$ qui est équivalent à M' équidistant de O et du point C d'affixe $\dfrac{1}{2}$

La droite cherchée est donc la médiatrice de [OC] et son équation est : $x = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE 3 (5 points), réservé aux candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de mathématiques.

Partie A : On rappelle que la fonction logarithme népérien, notée ln, définie sur] 0 ; + ∞[vérifie, pour tous réels a et b strictement positifs, ln (a b) = ln (a) + ln (b). Démontrer que, pour tous réels a strictement positif et pour tout entier naturel n, on a : ln (a^n) = n ln a.

On démontre ce résultat par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a : $\ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $0 \times \ln a = 0$

Hérédité. Considérons un entier k tel que $\ln (a^k) = k \ln a$

Démontrons qu'alors $\ln (a^{k+1}) = (k + 1) \ln a$.

$\ln (a^{k+1}) = \ln (a^k \times a) = \ln (a^k) + \ln a = k \ln a + \ln a = (k + 1) \ln a$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $\ln (a^n) = n \ln a$.

Partie B 1° Le plan complexe est ramené à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit le nombre complexe $a = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{4}$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, le point A_n d'affixe z_n vérifiant $\begin{cases} z_0 = 6+6i \\ z_{n+1} = a^n z_0 \end{cases}$.

On pose $r_n = | z_n |$ pour $n \geq 0$. a) La suite (r_n) est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{V}$

$$r_n = | a^n z_0 | = | a |^n \times | z_0 | \text{ et } | a | = \frac{1}{4}\sqrt{3+1} = \frac{1}{2}$$

$r_n = | z_0 | \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc la suite (r_n) est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

b) Lorsque n tend vers + ∞, les points A_n se rapprochent du point A_0. $\boxed{F}$

On a $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} OA_n$ donc les points A_n se rapproche de O par de A_0.

c) $\arg (z_5) = \dfrac{5\pi}{12}$ [2 π]. $\boxed{V}$

$\arg (z_5) = \arg (z_0 a^5) = \arg z_0 + 5 \times \arg a$

$$z_0 = 6 + 6i = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \text{ donc } \arg z_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$a = \frac{-\sqrt{3}+i}{4} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{5i\pi/6} \text{ donc } \arg a = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arg z_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{25\pi}{6} = \frac{3\pi + 50\pi}{12} = \frac{53\pi}{12} = \frac{48\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = 4\pi + \frac{5\pi}{12}.$$

On a donc bien $\arg (z_5) = \dfrac{5\pi}{12}$ [2 π].

d) Pour tout entier naturel n, $\arg (z^n) = \dfrac{5n\pi}{6}$ [2 π]. $\boxed{F}$

$\arg (z_n) = \arg (z_0 a^n) = \arg z_0 + n \times \arg a = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5n\pi}{6} \neq \dfrac{5n\pi}{6}$ $\boxed{F}$

2° Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $z_A = -i$, $z_B = 3$, $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = -1 + 2i$ On note $Z = \dfrac{z-2-3i}{z+i}$

a) L'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2}$ est le point d'affixe 1 + i $\boxed{F}$.

$$z' - z_A = -\frac{1}{2}(z - z_A) \text{ donc } z' = -i - \frac{1}{2}(2 + 3i + i) = -i - 1 - 2i = -1 - 3i$$

b) L'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ est le point d'affixe $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}i$. $\boxed{V}$

$$z' - z_B = e^{i\pi/6}(z - z_B) \text{ donc } z' = 3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(2 + 3i - 3) = 3 + \frac{\sqrt{3}+i}{2}(-1 + 3i) = 3 - \frac{\sqrt{3}+i}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}+i}{2}i$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3} - i + 3i\sqrt{3} + 3i^2}{2} = \frac{3 - \sqrt{3} + (3\sqrt{3} - 1)i}{2}$$

c) L'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur est contenu dans un cercle de centre Ω d'affixe 1+i.

$z - 2 - 3i$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CM}$ et $z + i$ est celui du vecteur $\overrightarrow{AM}$ $\boxed{V}$

$Z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\arg Z = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ ou $Z = 0$ on a alors $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AM}$ et donc m est sur le cercle de diamètre [AC]. Le milieu de [AC] est le point d'affixe $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-i + 2 + 3i}{2} = \dfrac{2 + 2i}{2} = 1 + i$.

M est bien sur un cercle de centre Ω

d) L'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit de module 1 est contenu dans une droite passant par O. $\boxed{\text{F}}$

$|Z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z - z_C|}{|z - z_A|} = 1 \Leftrightarrow |z - z_C| = |z - z_A|$ et $z \neq z_A$

M est donc un point de la médiatrice de [AC]

$OA = |z_A| = 1$ et $OC = |z_C| = \sqrt{4+9} \neq OA$ donc O n'est pas sur la médiatrice de [AC]

L'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit de module 1 est contenu dans une droite mais cette droite ne passe pas par O.

3° On considère une fonction f définie, dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+f(x)}$

a) Pour tout réel x, $0 \leq g(x) \leq 1$. $\boxed{\text{V}}$

Pour tout réel x on a

$f(x) \geq 0$ donc $1 + f(x) \geq 1 + 0$ donc $g(x) \geq 0$.

De plus $g(x) - 1 = \dfrac{f(x)}{1+f(x)} - 1 = \dfrac{f(x) - (1+f(x))}{f(x)} = -\dfrac{1}{f(x)} \leq 0$ donc $g(x) \leq 1$.

On a donc bien, pour tout réel x, $0 \leq g(x) \leq 1$.

b) Si, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x)$ est finie alors, quand x tend vers $+\infty$, il est possible que $g(x)$ tende vers $+\infty$

La fonction f est positive donc si $f(x)$ tend vers une limite finie cette limite ne peut être égale à -1 donc, quand x tend vers $+\infty$ $g(x)$ tend vers $\dfrac{\ell}{1+\ell}$ mais jamais vers $+\infty$. $\boxed{\text{F}}$

c) Si, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $g(x)$ est finie alors, quand x tend vers $+\infty$, la limite de $f(x)$ l'est aussi. $\boxed{\text{F}}$

Si la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ on a alors $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)\left(1 + \dfrac{1}{f(x)}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.

La limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$ est finie et pourtant la limite de $f(x)$ est infinie.

d) Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors la fonction g est croissante. $\boxed{\text{V}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc si f est croissante alors pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f'(x)(1+f(x)) - \times f(x) \times f'(x)}{(1+f(x))^2} = \dfrac{f'(x)}{(1+f(x))^2} > 0$ donc

g est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.

Variante $x \longmapsto f(x) \longmapsto \dfrac{f(x)}{1+f(x)}$

4° On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété « Pour tout réel x, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ ».

a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$ $\boxed{\text{V}}$

D'après les théorèmes de comparaison de limites.

b) Si pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) > 1 \\ v(x) = 2\,u(x) \end{cases}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. $\boxed{\text{F}}$

Contre-exemple : les fonctions u, v et f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$, $f(x) = 1{,}5 + \dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = 2 + \dfrac{2}{1+x^2}$

On a alors : pour tout réel x, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1{,}5 \neq 1 \end{cases}$

c) Si pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) > 1 \\ v(x) = 2\,u(x) \end{cases}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (v(x) - u(x)) = \ell$. $\boxed{\text{V}}$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 2\ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (v(x) - u(x)) = 2\ell - \ell = \ell$

d) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 2$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $\boxed{\text{F}}$

Contre-exemple : les fonctions u, v et f sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$u(x) = -2$, $f(x) = 1$ et $v(x) = 2$

On a alors : pour tout réel x, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq 0 \end{cases}$

1° Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction g_n définie sur] 0 ; + ∞ [par : $g_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$.

a) Déterminer les limites de g_n en 0 et en + ∞ puis étudier le sens de variations de g_n.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = -\infty$

g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} > 0$ pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n.

La fonction g_n est donc croissante sur] 0 ; + ∞ [.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans] 0 ; + ∞ [. On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle [1 ; e].

g_n est continue et strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = -\infty$ donc la fonction g_n change de signe sur] 0 ; + ∞ [. D'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire on peut dire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n

$g_n(1) = \frac{1}{n} - 1 \leq 0$ et $g_n(e) = \frac{e}{n} > 0$ donc $1 \leq \alpha_n < e$

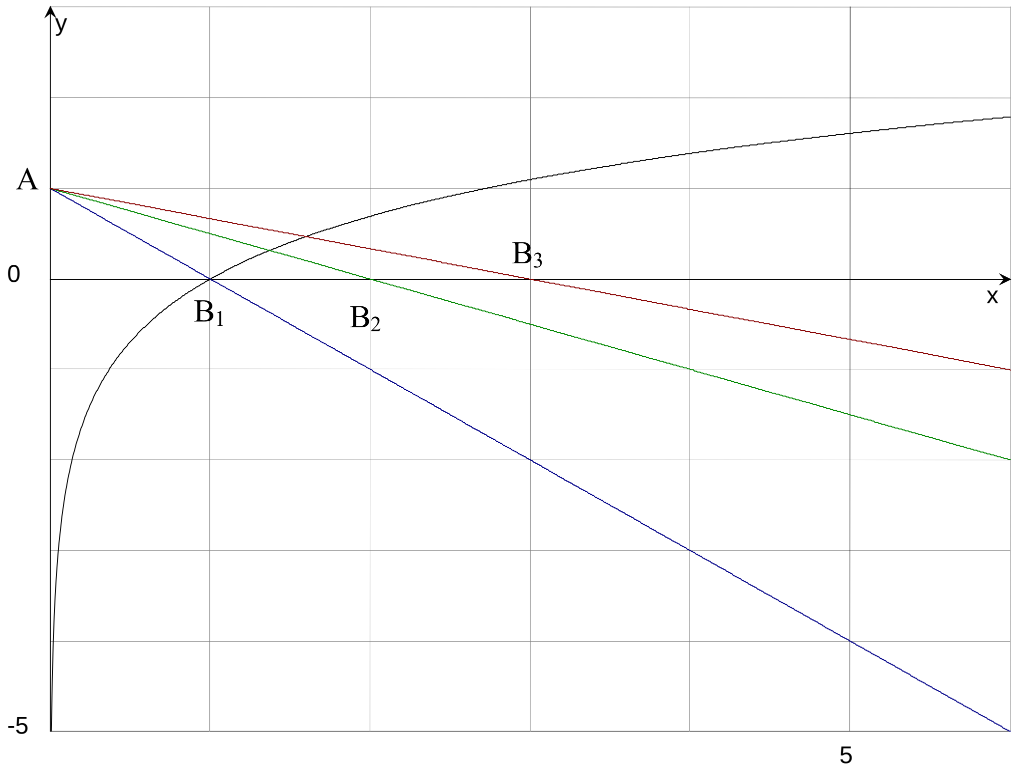
c) Etudier le signe de $g_n(x)$ sur] 0 ; + ∞ [

D'après les variations de la fonction g_n on a : $g_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x$

2° Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On note (T) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées (0 ; 1) et le point Bn de coordonnées (n ; 0).

$\overrightarrow{AB_n}\begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $n(y-1) + x = 0$ c'est à dire $y = -\frac{x}{n} + n$

b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.



c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = -\frac{x}{n} + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ \ln x = -\frac{x}{n} + n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ \ln x + \frac{x}{n} - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln x \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \alpha_n$$

d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

$\alpha_1 = 1$ car $g_1(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} + 1 = 0$. La suite ($\alpha_n$) semble être croissante.

3° a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

$$g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

$$g_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = 1 - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1 = \frac{-(n+1)\,\alpha_n + n\,\alpha_n}{n\,(n+1)} = -\frac{\alpha_n}{n\,(n+1)} < 0$$

c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

$g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $g_{n+1}(\alpha_n) < g_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Comme la fonction g_n est croissante sur $]\,0\,,+\infty\,[$ et que α_n et α_{n+1} sont strictement positifs on peut dire que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

En effet démontrons, par l'absurde, que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Si on avait $\alpha_n > \alpha_{n+1} > 0$ comme g_{n+1} est croissante sur $]\,0\,,+\infty\,[$ on aurait alors $g_{n+1}(\alpha_n) > g_{n+1}(\alpha_{n+1})$ ce qui est contraire aux l'hypothèses.

On a donc bien pour tout entier naturel n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. La suite (α_n) est donc croissante.

d) On admet que la suite (α_n) converge. On note ℓ sa limite. Établir que : $\ln \ell = \ell$ et en déduire la valeur de ℓ.

La suite (α_n) est croissante et majorée par e elle est donc convergente.

$$\ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \ln \alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right) = 1.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \alpha_n = \ln \ell$. on a donc bien $\ln \ell = 1$ c'est à dire $\ell = e$

4° Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x \ln x - 2x + \dfrac{x^2}{2n} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrer que la fonction f_n est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to0} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} -2x + \dfrac{x^2}{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} f_n(x) = 0 = f_n(0)$. la fonction f_n est donc bien continue en 0.

b) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ? La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ? Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f_n ?

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{x \ln x - 2x + \dfrac{x^2}{2\text{n}}}{x} = \ln x - 2 + \frac{x}{2n} \text{ donc } \lim_{x\to0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = -\infty$$

La limite n'est pas finie donc la fonction f_n n'est pas dérivable en 0. Comme f_n est continue en 0 on peut dire que la représentation graphique de f_n admet un tangente verticale en O.

c) Démontrer que pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$, $f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$.
Dresser alors le tableau de variation de la fonction f_n en précisant la limite de f_n en $+\infty$.

$$f_n'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 + \frac{2x}{2n} = \ln x - 1 + \frac{x}{n}$$

$$= g_n(x)$$

$$f_n(x) = x^2\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2n}\right)$$

x	0		α_n		$+\infty$
$f_n'(x) = g_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\text{x}} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

c) Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$

Il faut étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x \ln x - 2x + \frac{x^2}{2\,(n+1)} - \left(x \ln x - 2x + \frac{x^2}{2\,n}\right) = x \ln x - 2x + \frac{x^2}{2\,(n+1)} - x \ln x + 2x - \frac{x^2}{2\,n}$$

$= \dfrac{x^2}{2\,(n+1)} - \dfrac{x^2}{2\,n} = \dfrac{x^2}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{n-(n+1)}{n} = -\dfrac{x^2}{2\,n}$ ce qui est toujours strictement négatif.

La courbe $\mathscr{C}_n$ est toujours au dessous de la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$