BAC BLANC N°2 25 Mai 2007

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, seront pris en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 2 6 points

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle] 0 ; 1].

1° On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle (E_λ) :

$$y' = y^2 + \lambda y \text{ et la condition } y(0) = 1.$$

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$:

$$z = \frac{2}{y_0}$$

Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2° Question de cours

PRÉ-REQUIS

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'_λ) : $z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z'.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$.

3° a) Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$

On pourra étudier sur] 0 ; 1] la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1}$.

b) En déduire que $\frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$

4° En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$.

Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

Exercice 2   4 points.

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et M un point quelconque de ce cercle $\mathscr{C}$.

1° Le point D est défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID}$.

a) Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM}$ ·et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$ sont nuls.

En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

b) Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

2° Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points A, B, I d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 4 + 2$ i et $z_I = 4$. On nomme f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{1}{3} z + 2 + \frac{2}{3}$ i.

a) Montrer qu'il existe un unique point Ω tel que f (Ω) = Ω et calculer l'affixe ω de ce point.

Pour tout point d'affixe z, exprimer alors $Z - \omega$ en fonction de $z - \omega$. Préciser la nature de l'application f.

b) M étant un point quelconque d'affixe z_M , montrer que l'image par l'application f du point M est l'isobarycentre G d'affixe z_G des points A, B, M.

c) Déterminer l'ensemble des points G lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

d) En déduire alors, à l'aide du résultat de la question 1° b), l'ensemble décrit par le point D défini par $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$ lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2.

Exercice 3   5 points

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.

Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1° Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

2° Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A.

Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a) Définir la loi de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3° a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.

Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %.

Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4° La variable aléatoire, Y qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par : $f(t) = 0{,}0007\ \mathrm{e}^{-0{,}0007\, t}$.

a) Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

b) Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^x 0{,}0007\, t\, \mathrm{e}^{-0{,}0007\, t}\, \mathrm{d}t$

Déterminer la limite quand x tend vers + ∞ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable Y.

Exercice 4 5 points

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(2 ; 1 ; 3) et B(− 7 ; 2 ; 1).

Le plan P admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 4$.

1° L'ensemble des points M de l'espace tels que $\| 4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \| = 2$ est :

a) une sphère	b) un plan de l'espace	c) l'ensemble vide.

2° Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

a) $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	b) $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$	c) $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

3° La sphère de centre B et de rayon 1 :

coupe le plan P suivant un cercle	est tangente au plan P	ne coupe pas le plan P.

4° On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2 ; -1)$ et la droite D' d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Les droites D et D' sont :

a) coplanaires et parallèles	b) coplanaires et sécantes	c) non coplanaires.

5° L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b) le plan d'équation cartésienne $9x - y + 2z + 20 = 0$,

c) le plan d'équation cartésienne $x + 7y - z - 6 = 0$.

Exercice 2 : National septembre 2006 Commun à tous les candidats Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle] 0 ; 1]. 1° On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle (Eλ) : y' = y2 + λ y et la condition y(0) = 1. On suppose qu'il existe une solution y' de (Eλ) strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$: $z = \frac{1}{y0}$ Ecrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

$z = \frac{1}{y_0}$ donc $y_0 = \frac{1}{z}$ et $y_0' = -\frac{z'}{z^2}$

y est solution de l'équation différentielle (E_λ) donc $y_0' = y_0^2 + \lambda\, y_0$ donc $-\frac{z'}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \lambda \times \frac{1}{z}$ c'est à dire $-z' = 1 + \lambda\, z$

z est donc solution de l'équation différentielle : $z' = -(\lambda\, z + 1)$

Question de cours PRE-REQUIS Les solutions de l'équation différentielle y' = – λ y sont les fonctions $x \mapsto C\, e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle. a) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'λ) : z' = – (λ z + 1) telle que z(0) = 1.

$z' = -(\lambda\, z + 1) \Leftrightarrow z' = -\lambda\left(z + \frac{1}{\lambda}\right)$

On pose $y = z + \frac{1}{\lambda}$ On a alors $z = y - \frac{1}{\lambda}$ et $z' = y'$

z solution de (E'_λ) $\Leftrightarrow z' = -(\lambda\, z + 1) \Leftrightarrow z' = -\lambda\left(z + \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y' = -\lambda\, y \Leftrightarrow$ y solution de (E_λ)

On a donc z solution de (E'_λ) si, et seulement si, $z + \frac{1}{\lambda}$ est solution de (E_λ)

Les solutions z de (E'_λ) sont donc de la forme : $x \mapsto C\, e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$

$z(0) = 1 \Leftrightarrow C\, e^{-\lambda \times 0} - \frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow C - \frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\lambda} + 1.$

Il existe donc une et une seule solution de (E_λ) vérifiant $z(0) = 1$

b) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z0.

z_0 est donc la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$ et donc pour tout réel x, $z_0(x) = \frac{(1 + \lambda)\, e^{-\lambda x} - 1}{\lambda}$

On veut maintenant montrer que la fonction z0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$. 3° a) Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$

On pourra étudier sur] 0 ; 1] la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1}$.

Soit la fonction f définie sur] 0 , 1] par $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1}$.

f est dérivable sur] 0 ; 1] et pour tout réel x de] 0 , 1] on a :

$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - \frac{1 \times (x + 1) - x \times 1}{(x + 1)2} = \frac{x + 1 - x - 1 + x}{(x + 1)^2} = \frac{x}{(x + 1)^2} > 0.$ f est donc croissante sur] 0 ; 1]

Pour tout réel x de] 0 ; 1] $f(x)$ est supérieur à $f(0)$ donc

$\ln(1 + x) - \frac{x}{x + 1} > \ln(1 + 0) - \frac{0}{1 + 0}$ donc $\ln(1 + x) > \frac{x}{x + 1}$

λ appartient à] 0 ; 1] donc $\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$

b) En déduire que $\frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \frac{1}{2}$

$\ln(1 + \lambda) > \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ donc $\frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda) > \frac{1}{\lambda + 1}$

$0 < \lambda \leq 1 \Rightarrow 1 < \lambda + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda + 1} \leq \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{\lambda+1} \geq \frac{1}{2}$

4° En déduire que la fonction z0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$.

Démontrer alors que (Eλ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

$z_0(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow (1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \frac{1}{1+\lambda} \Leftrightarrow -\lambda x = \ln\left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \Leftrightarrow -\lambda x = -\ln(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda)$

On a vu que $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$ donc la solution de l'équation $z_0(x) = 0$ n'appartient pas à $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$

z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$ et elle est continue sur cet intervalle elle garde donc un signe constant sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$. $z_0(0) = 1$ donc z_0 est strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$

(E_λ) admet comme solution $\frac{1}{z_0}$ et cette solution est strictement positive sur $\left]-\infty, +\frac{1}{2}\right[$.

$y_0(x) = \frac{1}{z_0(x)} = \frac{1}{\frac{(1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1}$

Exercice 2 : Antilles-Guyane septembre 2003 Soient A, B deux points distincts fixés d'un cercle C de centre I et M un point quelconque de ce cercle C. 1° Le point D est défini par $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ID}$. a) Prouver que les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$ sont nuls.

$(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) == -BI^2 + IM^2 = 0$ car B et M sont sur un cercle de centre I.

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{ID}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM})$

$= IM^2 - IA^2 = 0$

En déduire à quelles droites particulières du triangle ABM le point D appartient puis préciser la nature du point D pour le triangle AMB.

(AD) ⊥ (BM) donc, dans le triangle ABM, D est sur la hauteur issue de A.

$\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AM}$ donc D est sur la hauteur issue de B

D est l'orthocentre de ABM.

b) Soit G l'isobarycentre des points A, B, M. Exprimer $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{IG}$.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM} = (1 + 1 + 1)\ \overrightarrow{IG}$ donc $\overrightarrow{ID} = 3\ \overrightarrow{IG}$

2° Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points A, B, I d'affixes respectives zA = 2, zB = 4 + 2 i et zI = 4. On nomme f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \frac{1}{3} z + 2 + \frac{2}{3}$i. a) Montrer qu'il existe un unique point Ω tel que f (Ω) = Ω et calculer l'affixe ω de ce point.

$$\omega = \frac{1}{3}\omega + 2 + \frac{2}{3}i \Leftrightarrow \omega - \frac{1}{3}\omega = 2 + \frac{2}{3}i \Leftrightarrow \frac{2}{3}\omega = 2 + \frac{2}{3}i \Leftrightarrow \omega = 2 \times \frac{3}{2} + i \Leftrightarrow \omega = 3 + i.$$

Ω est le point d'affixe 3 + i.

Pour tout point d'affixe z, exprimer alors Z –ω en fonction de z -ω. Préciser la nature de l'application f .

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{3} z + 2 + \frac{2}{3} i \\ \omega = \frac{1}{3}\omega + 2 + \frac{2}{3} i \end{cases} \Rightarrow Z - \omega = \frac{1}{3} z - \frac{1}{3}\omega \Rightarrow Z - \omega = \frac{1}{3}(z - \omega)$$

f est donc l'homothétie de centre Ω de rapport $\frac{1}{3}$.

b) M étant un point quelconque d'affixe zM , montrer que l'image par l'application f du point M est l'isobarycentre G d'affixe zG des points A, B, M.

$$Z_M = \frac{1}{3} z + 2 + \frac{2}{3} i \Leftrightarrow Z_M = \frac{z + 6 + 2i}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_M}{3} = \frac{z + 2 + 4 + 2i}{3} = Z_M \text{ donc } M' = G$$

c) Déterminer l'ensemble des points G lorsque le point M décrit le cercle C de centre I et de rayon 2.

L'image du cercle de centre I de rayon 2 par l'homothétie *f* est le cercle de centre I' de rayon $\frac{2}{3}$

I' est l'isobarycentre de A, B et I.

$$z_{I'} = \frac{z_A + z_B + z_I}{3} = \frac{2 + 4 + 2i + 4}{3} = \frac{10 + 2i}{3} \quad (\text{ou } Z_I = \frac{1}{3} z_I + 2 + \frac{2}{3} i = \frac{4}{3} + 2 + \frac{2}{3} i = \frac{10}{3} + \frac{2}{3} i)$$

d) En déduire alors, à l'aide du résultat de la question 1° b), l'ensemble décrit par le point D défini par $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$ lorsque le point M parcourt le cercle C de centre I et de rayon 2.

On a vu que $\overrightarrow{ID} = 3\ \overrightarrow{IG}$ donc D est l'image de G par l'homothétie de centre I de rapport 3.

L'image du cercle de centre I' de rayon $\frac{2}{3}$ par cette homothétie est le cercle de centre I" de rayon 2.

$\overrightarrow{II''} = 3\ \overrightarrow{II'} \Leftrightarrow z_I'' - 4 = 3\left(\frac{10 + 2i}{3} - 4\right) \Leftrightarrow Z'' = 4 + 10 + 2i - 12 \Leftrightarrow z'' = 2 + 2i$. Voir la figure

Baccalauréat série S Antilles-Guyane juin 2003 Exercice 3 5 points Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts. 1° Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.

On définit les événements suivants :

S « l'article présente un défaut de soudure » et E « l'article présente un défaut de sur un composant électronique »

On a alors : $p(S) = 0{,}03$, $p(E) = 0{,}02$ et $p(S \cap E) = p(S) \times p(E) = 0{,}0006$ car s et E sont indépendants.

$p(S \cup E) = p(S) + p(E) - p(S \cap E) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$

2° Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux. a) Définir la loi de X.

On répète 800 fois la même épreuve de façons indépendantes (vu la quantité produite par l'entrepris A)

Pour chaque épreuve la probabilité d'avoir un article défectueux est de 0,0494.

La variable aléatoire X qui associe le nombre d'article défectueux suit donc une loi binomiale de paramètre 800 et 0,0494.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre?

$E(X) = n \times p = 800 \times 0{,}0494 = 39{,}52$

En moyenne on peut "espérer" entre 39 et 40 articles défectueux.

3° a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10−3 près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

On utilise une loi binomiale de paramètre 25 et 0,0494.

$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$

$= 1 - \binom{25}{0} 0{,}0494^0 \times (1 - 0{,}0494)^{25} - \binom{25}{1} 0{,}0494 \times (1 - 0{,}0494)^{24} \approx 0{,}352$

b) Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

$p(X_n \geq 1) = 1 - p(X_n < 1) = 1 - (1 - 0{,}094)^n$

$1 - (1 - 0{,}094)^n \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5 \leq 0{,}9506^n \Leftrightarrow \ln(0{,}5) \leq n \ln 0{,}9506 \Leftrightarrow n \leq \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9506}$

$\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9506} \approx 13{,}6$ donc il doit commander moins de 13 articles.

4° La variable aléatoire, Y qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par : f (t) = 0,0007 e−0,0007 t.
a) Calculer la probabilité, à 10−3 près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

$\int_{700}^{1000} 0{,}0007\, e^{-0{,}0007\, t} = [-e^{-0{,}0007\, t}]_{700}^{1000} = -e^{-0{,}7} + e^{-0{,}49} \approx 0{,}116$

b) Calculer l'intégrale F(x) = $\int_0^x$ 0,0007 t e−0,0007 x dt. Déterminer la limite quand x tend vers +∞ de F(x) ; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable Y.

$\begin{cases} u(t) = 0{,}0007\, t \text{ et } u'(t) = 0{,}0007 \\ v'(t) = e^{-0{,}0007\, t} \text{ et } v(t) = -\dfrac{e^{-0{,}0007\, t}}{0{,}0007} \end{cases}$ donc

$F(x) = \left[-0{,}0007\, t \times \dfrac{e^{-0{,}0007\, t}}{0{,}0007}\right]_0^x + \int_0^x \dfrac{e^{-0{,}0007\, t}}{0{,}0007} \times 0{,}0007\, dt = -x\, e^{-0{,}0007\, x} + \left[-\dfrac{e^{-0{,}0007\, t}}{0{,}0007}\right]_0^x$

$= -x\, e^{-0{,}0007} - \dfrac{e^{-0{,}0007\, x}}{0{,}0007} + \dfrac{1}{0{,}0007}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{1}{0{,}0007} \approx 1428.$

Exercice 2 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. On considère les points A(2 ; 1 ; 3) et B(− 7 ; 2 ; 1). Le plan P admet pour équation cartésienne x + 2 y + 2 z = 4.

1° L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2$ est :

a) une sphère	b) un plan de l'espace	c) l'ensemble vide.

$4 - 1 \neq 0$. Soit G, le barycentre de {(A, 4), (B, – 1)} on a : $4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = (4 - 1)\,\overrightarrow{MG} = 3\,\overrightarrow{MG}$

On a donc : $\|4\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2 \Leftrightarrow \|3\,\overrightarrow{MG}\| = 2 \Leftrightarrow 3\,MG = 2 \Leftrightarrow MG = \dfrac{2}{3}$

l'ensemble cherché est donc la sphère de centre G de rayon $\dfrac{2}{3}$

2° Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan P sont :

a) $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	b) $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$	c) $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Le plan P admet pour équation cartésienne $x + 2\,y + 2\,z = 4$ donc le vecteur $\vec{n}$ (1 , 2 , 2) est un vecteur normal de P.

On note $H_1\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. $\overrightarrow{AH_1}\left(\dfrac{8}{3} - 2, \dfrac{1}{3} - 1, \dfrac{1}{3} - 3\right)$ donc $\overrightarrow{AH_1}\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{n}$

$H_2\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$. $\overrightarrow{AH_2}\left(\dfrac{5}{3} - 2, \dfrac{1}{3} - 1, \dfrac{7}{3} - 3\right)$ donc $\overrightarrow{AH_2}\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{AH_2} = -\dfrac{1}{3}\,\vec{n}$ donc $(AH_2) \perp P$

$\dfrac{5}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{14}{3} = \dfrac{21}{3} = 7 \neq 4$ donc $H_2 \notin P$

$H_3\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. $\overrightarrow{AH_3}\left(\dfrac{4}{3} - 2, -\dfrac{1}{3} - 1, \dfrac{5}{3} - 3\right)$ donc $\overrightarrow{AH_3}\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{AH_3} = -\dfrac{2}{3}\,\vec{n}$ donc $(AH_3) \perp P$

$\dfrac{4}{3} + 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2 \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{10}{3} = \dfrac{12}{3} = 5$ donc $H_3 \in P$

On peut aussi calculer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur P

$H(2 + t, 1 + 2\,t, 3 + 2\,t)$. $H \in P \Leftrightarrow 2 + t + 2\,(1 + 2\,t) + 2\,(3 + 2\,t) = 4 \Leftrightarrow 2 + t + 2 + 4\,t + 6 + 4\,t = 4 \Leftrightarrow 9\,t = -6 \Leftrightarrow$

$t = -\dfrac{2}{3}$ $x_H = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, $y_H = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$ et $z_H = 3 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3}$

3° La sphère de centre B et de rayon 1 :

coupe le plan P suivant un cercle	est tangente au plan P	ne coupe pas le plan P.

On calcule la distance de B(− 7; 2 ; 1) à P

$$d(B, P) = \frac{|x_B + 2\,y_B + 2\,z_B - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-7 + 2 \times 2 + 2 \times 1 - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} > 1$$. Donc la sphère ne coupe pas le plan P.

4° On considère la droite D de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$(1 ; 2 ; – 1) et la droite D' d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 4 + 2\,t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Les droites D et D' sont :

a) coplanaires et parallèles	b) coplanaires et sécantes	c) non coplanaires.

Une représentation de D est : $\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 + 2\,t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour déterminer l'intersection de D et D' il faut résoudre le système $\begin{cases} x = 4 + 2\,t \\ y = 3 + t \\ z = t \\ x = 2 + t' \\ y = 1 + 2\,t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 4 + 2\,t \\ y = 3 + t \\ z = t \\ x = 2 + t' \\ y = 1 + 2\,t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2\,t = 2 + t' \\ 3 + t = 1 + 2\,t' \\ t = 3 - t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2\,(3 - t') = 2 + t' \\ 3 + 3 - t' = 1 + 2\,t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = 8/3 \\ t' = 5/3 \end{cases}$$ le système n'a donc pas de solution

$\vec{u}$(1 ; 2 ; – 1) est un vecteur directeur de d et $\vec{v}$ (2, 1, 1) est un vecteur directeur de D'. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc d et D' ne sont ni sécantes ni parallèles. Elles sont donc non coplanaires

5° L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a) la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) le plan d'équation cartésienne 9 x − y + 2 z + 20 = 0,

c) le plan d'équation cartésienne x + 7 y − z − 6 = 0.

L'ensemble cherché est le plan médiateur de [AB] il est donc perpendiculaire à la droite (AB)

$\overrightarrow{AB}$ (– 9 , 1 , – 2) colinéaire au vecteur $\vec{n}$ (9 , – 1 , 2).

Les réponses a) et c) sont donc fausses.

Equation du plan médiateur :

Coordonnées du milieu de [AB] : $x_I = -\frac{5}{2}$, $y_I = \frac{3}{2}$ et $z_I = 2$.

Equation du plan : $9x - y + 2z = 9x_I - y_I + 2z_I \Leftrightarrow 9x - y + 2z = -\frac{45}{2} - \frac{3}{2} + 4 \Leftrightarrow 9x - y + 2z = -20$.

la réponse b) est donc bien la bonne.

variante :

M(x , y, z). AM = BM $\Leftrightarrow$ AM^2 = BM^2 $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x+7)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$

$\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$

$\Leftrightarrow 14 - 4x - 2y - 6z = 14x - 4y - 2z + 54 \Leftrightarrow 18x - 2y + 4z + 40 = 0 \Leftrightarrow 9x - y + 2z + 20 = 0$.