TERMINALE S 6 et S7 BAC BLANC N°2 13 Mai 2006

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 1 : *(7 points)*

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$ par : $f(x) = (20x+10)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité graphique 1cm).
1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]\,0\ ;+\infty\ [$.
Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe C .
5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,dx$.

Partie B

On note y(t) la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant t = 0, est y(0) = 10.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ associe y(t), est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20\,e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty\ [$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\ ;+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$.
Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, de l'équation différentielle :
(E') $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
b. Résoudre l'équation différentielle (E ').
c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3]. *(On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle [a,b] est le réel* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *)*
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Baccalauréat France série S septembre 2003

Exercice 2 : *(5 points)*

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».
a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 3 : (*4 points*)

L'espace est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ orthonormal. Soit s un nombre réel.
On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite (D) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \qquad s \in \mathbb{R} \\ z = -2s \end{cases}$$

1. a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

1. b. Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.

2. a. Le plan (P) est parallèle à (D) et il contient Δ.Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; -2 ; 1)$ est un vecteur normal à P puis déterminer une équation cartésienne de (P) .
b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de (D) à (P) est indépendante de M.
c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de (P) avec le plan (xOy).
3. La sphère (S) est tangente au plan (P) au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de S se trouve à la distance d = 6 de (P) , du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de S .

Exercice 4 : *(4 points)*

Partie A :

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4i|$.
a. : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
b : (E) est la droite (ST) ;
c : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral.
Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;
b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;
c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4 i, et C un point du cercle de diamètre [AB].
On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.
a. $|z_G - 3 - 2,5\,i| = \frac{5}{6}$;
b. $z_G - (1 + i) = \frac{1}{3}(4 + 3\,i)$;
c. $z_G - (3 + 2,5\,i) = \frac{1}{3}(4 + 3\,i)$.

Partie B : Déterminer les nombres complexes z tels que les points M(1), M'(z^2) et M'' ($\frac{1}{z^2}$) soient alignés.

Exercice 1 : (7 points) **Partie A** **La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$**
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1cm).
1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

On pose $X = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = -2X$. On a alors : $(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x} = (-40X+10)e^X = -40Xe^X + 10e^X$

on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{X\to-\infty} (-40Xe^X + 10e^X) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} (-40Xe^X + 10e^X) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

$(e^u)' = u' \times e^u$ donc $\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)' = -\frac{1}{2}\times e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 20\times e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(20x+10) = (20-10x-5)e^{-\frac{1}{2}x} = (15-10x)e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 15-10x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{15}{10} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 40e^{-\frac{3}{4}} \approx 18{,}9.$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de f '		+	0	−	
f	10	↗		↘	0

3. Établir que l'équation f (x) = 10 admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

Sur] 0 ; 1,5].
f est croissante sur [0 ; 1,5] et f(0) = 10 donc pour tout réel x de] 0 ; 1,5], f(x) > 10 et on peut donc dire que l'équation f(x) = 10 n'admet pas de solution unique sur] 0 ; 1,5]
Sur $[1{,}5 ; +\infty[$.
f est continue et croissante sur $[1{,}5 ; +\infty[$, $f(1{,}5) \approx 18{,}9$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Comme $0 \leq 10 \leq f(1{,}5)$ on peut dire que l'équation f(x) = 10 admet une solution unique : α
$f(4{,}673) \approx 10{,}001$ et $f(4{,}674) \approx 9{,}998$ donc $4{,}673 \leq \alpha \leq 4{,}674$.

4. Tracer la courbe C .

5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,dx$.

$\left.\begin{array}{l} u(x) = 20x+10 \text{ et } u'(x) = 20 \\ v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \text{ et } v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}\right\}$ donc $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}(20x+10)\right]_0^3 - \int_0^3 -40e^{-\frac{1}{2}x}\,dx =$

$-2e^{-\frac{3}{2}}\times(60+10) + 2e^0(20\times0+10) + \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\times 40\right]_0^3 = -140e^{-\frac{3}{2}} + 20 - 80e^{-\frac{3}{2}} + 80e^0 = 100 - 220e^{-\frac{3}{2}}$

Partie B **On note y(t) la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant t = 0, est y(0) = 10. On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ associe y(t), est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$. 1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.**

$f(x) = (20t+10)e^{-\frac{1}{2}t}$ et $f'(x) = (15-10t)e^{-\frac{1}{2}t}$

Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) + \frac{1}{2}f(x) = (15-10t)e^{-\frac{1}{2}t} + (10t+5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}$

f est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [, qui prend la valeur 10 à l'instant 0. a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur [0 ; +∞[vérifiant g (0) = 10. Démontrer que la fonction g − f est solution, sur l'intervalle [0 ; +∞[, de l'équation différentielle : (E ') $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

Si g solution de l'équation différentielle (E) alors pour tout réel t de [0 ; + ∞ [: $g'(t) + \frac{1}{2} g(t) = 20\, e^{-\frac{1}{2}t}$.

Comme f est solution de (E) on a pour tout réel t [0 ; + ∞ [: $f'(t) + \frac{1}{2} f(t) = 20\, e^{-\frac{1}{2}t}$

On a alors pour tout réel t [0 ; + ∞ [: $g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2} g(t) - \frac{1}{2} f(t) = 20\, e^{-\frac{1}{2}t} - 20\, e^{-\frac{1}{2}t}$

c'est à dire : $(f - g)'(t) + \frac{1}{2}(f - g)(t) = 0$.

f – g est donc bien solution de (E ')

b. Résoudre l'équation différentielle (E ').

$y' + \frac{1}{2} y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2} y$

Les solutions de l'équation différentielle (E ') sont de la forme : $t \longmapsto k\, e^{-\frac{1}{2}t}$ où k est une constante réelle.

c. Conclure.

Si g est un solution de (E) et si g(0) = 10 alors on a :

comme g est solution de (E) f – g est solution de (E ') et donc f – g est de la forme $t \longmapsto k\, e^{-\frac{1}{2}t}$

g(0) = 10 donc f(0) – 10 = k e^0 donc f(0) = k + 10.

On sait que f(0) = 10 donc 10 + k = 10 donc k = 0 donc f – g = 0 donc f =g **CQFD**

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

Il faut résoudre l'inéquation $f(t) \leq f(0)$.

$f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow f(t) \leq 10$.

d'après l'étude des variations de f on sait que $f(t) \leq 10 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t \geq \alpha$ avec $\alpha \approx 4{,}67$. $0{,}67 \times 60 = 40{,}2$.

la température de cette réaction chimique redescend donc à sa valeur initiale au bout de 4 h 40 minimum environ.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3]. Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

(On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle [a,b] est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$)

La température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3] c'est à dire : $\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx$

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3} \times \left(100 - 220\, e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx 17 \text{ degrés}$$

Exercice 2 : (5 points) **Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8%de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ». a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.**

Le propriétaire prélève **au hasard** et avec remise **20** pièces donc il effectue **20** tirages **indépendants**
Chaque tirage a **deux issues possibles** «la pièce a une face étrangère» ou «la pièce n'a pas une face étrangère»

la probabilité d'avoir une face étrangère est : $p = \frac{40}{100} = 0,4$. X, qui compte le nombre de pièces portant une face « étrangère », est donc bien une loi binomiale de paramètre 20 et 0,4.

b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

$$p(X = 5) = \binom{20}{5} 0,4^5 \times (1 - 0,4)^{15} = 15504 \times 0.4^5 \times 0.6^{15} \approx 0,075.$$

c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

On calcule la probabilité de l'événement contraire.

$$p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{20}{0} 0,4^0 \times 0,6^{20} + \binom{20}{1} 0,4^1 \times 0,6^{19} \approx 0,0005$$

La probabilité cherchée est donc égale a : $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) \approx 0,9995$

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac. On prélève au hasard une pièce du sac. On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'événement « la pièce porte une face étrangère ».

a. Déterminer P(S), $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

On peut repréesenter la situation avec un tableau

	S	$\overline{S}$ = J	
E	1000	600	1600
$\overline{E}$	1500	6900	8400
	2500	7500	10000

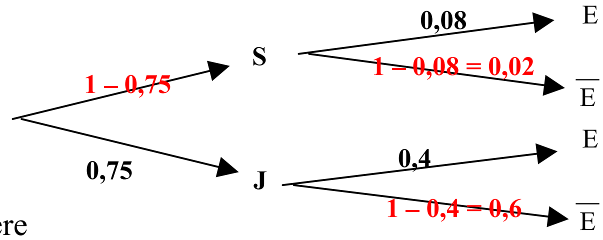
La caisse du rayon "journaux" contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs » donc la caisse du rayon journeaux contient 75 % des pièces de 1 € et celle du rayon souvenir 25 %
Soit n le nombre de pièces de 1 euro de la caisse souvenir.
Dans la caisse journeaux il y a 3 n pièsce de 1 € et en tout il y a 4 n pièces de 1 €.

Les $\frac{3}{4}$ des pièces viennent de la caisse journeaux et on peut donc dire que sur 10 000 pièces il y a $\frac{75}{100} \times 10\,000$ = 7500 qui proviennent du rayon journeaux et $\frac{25}{100} \times 10\,000 = 2500$ proviennent du rayon souvenir

40% des pièces de 1 € du rayon « souvenirs » portent face étrangèredonc sur 2500 pièces du rayon « souvenirs»
$\frac{40}{100} \times 2500 = 1\,000$ sont des pièces étrangères.

8% des pièces de 1 € du rayon «journaux» portent une face étrangère donc sur 7500 pièces du rayon «journaux»
$\frac{8}{100} \times 7500 = 600$ sont des pièces étrangères.

On peut repréesenter la situation avec un arbre



On note p = p(S)

On a $p(J) = 3 \times p(S)$ et $p(J) + p(S) = 1 = 4\ p(S)$ donc $p(S) = \frac{1}{4}$

40% des pièces de 1 € du rayon « souvenirs » portent face étrangère

donc $p_S(E) = \frac{40}{100} = 0,4$

$p(S \cap E)\ p(S) \times p_S(E) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$

b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

$$p(E) = p(S \cap E) + p(\overline{S} \cap E) = \frac{1000}{10000} + \frac{600}{10000} = 0,16$$

c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

$$p_E(S) = \frac{p(S \cap E)}{p(E)} = \frac{0,1}{0,16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$$

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16. Le collectionneur prélève *n* pièces (*n* entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise. Calculer *n* pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

La variable aléatoire Y égale au nombre de pièces portant une face étrangère suit une loi binomiale de paramètre n et 0,16

$p(Y = 0) = (1 - 0{,}16)^n = 0{,}84^n$ et la probabilité cherchée est donc égale à : $1 - 0{,}84^n$

Il faur résoudre l'inéquation : $1 - 0{,}84^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}9 \geq 0{,}84^n \Leftrightarrow 0{,}84^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \ln(0{,}84) \leq \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)}$ car ln (0,84) ><0 et donc il suffit que $n \geq 14$ car $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}84)} \approx 13{,}2$

Exercice 3 : (*4 points*) L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormal. Soit s un nombre réel. On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ;3;10) ainsi que la droite (D) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$

1. a. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10-8 \\ 3-0 \\ 10-8 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ. Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$\begin{cases} x = x_A + 2t \\ y = y_A + 3t \\ z = z_A + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ c'est à dire $\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 3t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1. b. Démontrer que D et Δ sont non coplanaires.

Première méthode.

On sait que deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
On démontre qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre.

Etude du parallélisme :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Etude de l'intersection des deux droites

Il faut résoudre le système $\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \\ x = 8 + 2t \\ y = 3t \\ z = 8 + 2t \end{cases}$ ou le système plus simplement $\begin{cases} -5 + 3s = 8 + 2t \\ 1 + 2s = 3t \\ -2s = 8 + 2t \end{cases}$

$\begin{cases} -5 + 3s = 8 + 2t \\ 1 + 2s = 3t \\ -2s = 8 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3s - 2t = 13 \\ 2s - 3t = -1 \\ 2t + 2s = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5s = 13 - 8 \quad L_1 + L3 \\ 3t = 2s + 1 \\ t = -s - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ 3t = 3 \\ t = -1 - 4 \end{cases}$ ce qui est impossible.

Le système n'a donc pas de solution et donc les droites (AB) et Δ ne sont pas sécantes

Les droites (AB) et Δ ne sont ni sécantes ni parallèles, elles ne sont donc pas coplanaires.

Deuxième méthode.

Le point N(5 , 1 , 0) est un point de Δ le point A(8 , 0 , 8) est un point de (D)

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 5-8 \\ 1-0 \\ 0-8 \end{pmatrix}$

(AB) et Δ sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n}$

$\overrightarrow{AN} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3\alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha + 3\beta \\ -8 = -2\alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ -3 = 3\alpha - 2 \times \frac{7}{5} \\ 1 = 2\alpha - 3 \times \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ 3\alpha = -\frac{15}{5} + \frac{14}{5} \\ 2\alpha = \frac{5}{5} + \frac{21}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{7}{5} \\ \alpha = -\frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{13}{5} \end{cases}$

Le système n'a donc pas de solution et donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AN}$ ne sont pas coplanaires

2. a. Le plan (P) est parallèle à (D) et il contient Δ. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 2 ; 1) est un vecteur normal à P puis déterminer une équation cartésienne de (P) .

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ sont donc deux vecteurs directeurs du plan (P), non colinéaires.

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 3\times 2 + 2\times(-2) + (-2)\times 1 = 6 - 4 - 2 = 0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 2\times 2 + 3\times(-2) + 2\times 1 = 4 - 6 + 2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ il est donc orthogonal à (P)

le point A (8 ; 0 ; 8), est un point de Δ donc de (P) et $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P) on a donc :

Equation de (P) : $2x - 2y + z = 2\times 8 - 2\times 0 + 8 \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 24$.

b. Montrer que la distance d'un point quelconque M de (D) à (P) est indépendante de M.

Soit M(x , y , z) un point de (D). Il existe un réel s tel que : $\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}$

$$d(M,(P)) = \frac{|2x - 2y + z - 24|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2(-5+3s) - 2(1+2s) - 2s - 24|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-10 + 6s - 2 - 4s - 2s - 24|}{3} = 12.$$

On trouve bien un réel indépendant de M ce qui s'explique par le fait que la droite (D) est parallèle au plan (P) .

c. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de (P) avec le plan (xOy).

Equation de (P) : $2x - 2y + z - 24 = 0$.

Equation du plan (xOy) : $z = 0$

$$M(x, y, z) \in P \cap (xOy) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z - 24 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y + 24 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 12 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. La sphère (S) est tangente au plan (P) au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de S se trouve à la distance d = 6 de (P) , du même côté que O. Donner l'équation cartésienne de S .

On vérifie que C ∈ (P) : $2\times 10 - 2\times 1 + 6 - 24 = 20 - 2 + 6 - 24 = 0$.

Si Ω est le centre cherché alors C est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P).

On peut dire alors que d(Ω , (P)) = CΩ et que les vecteurs $\overrightarrow{C\Omega}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

Ω est donc un point tel que il existe un réel k telque $\overrightarrow{C\Omega} = k\,\vec{n}$ et CΩ = 6

$\|\overrightarrow{C\Omega}\| = |k| \times \|\vec{n}\|$ on a donc : et d (Ω,P) = CΩ = 6 CΩ = 6 $\Leftrightarrow |k| \times \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 6 \Leftrightarrow |k| = 2 \Leftrightarrow k = 2$ ou $k = -2$.

Ses deux valeurs de k correspondent à deux points

Pour connaître le point qui est du même côté du plan (P) on calcule les coordonnées des deux points et on choisit le point tel que $2\times x_\Omega - 2\times y_\Omega + z_\Omega - 24$ soit du même signe que $2\times 0 - 2\times 0 + 0 - 24$.

Si k = 2 alors $\overrightarrow{C\Omega}\begin{pmatrix}2\times 2\\-2\times 2\\2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 4 \\ y_\Omega = 1 - 4 \\ z_\Omega = 6 + 2 \end{cases}$

Ω (14 , – 3; 8) et $2\times 14 - 2\times(-3)\ 6 + 8 - 24 \geq 0$ alors que $2\times 0 - 2\times 0 + 8 - 24 < 0$ le point trouvé n'est pas du même coté de (P) que O.

Si k = – 2 alors $\overrightarrow{C\Omega}\begin{pmatrix}-2\times 2\\2\times 2\\-2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x_\Omega = 10 - 4 \\ y_\Omega = 1 + 4 \\ z_\Omega = 6 - 2 \end{cases}$ alors : Ω (6 ; 5 ; 4)

Remarque : Ω(2) et Ω(–2) sont situés de part et d'autre du plan (P) car le milieu H de [Ω(2) Ω(–2)] est dans (P).
Le point situé du même coté que O du plan (P) est donc le point le plus proche de O c'est à dire le point Ω(–2)

$2\times 6 - 2\times 5 + 4 - 24 = -10 < 0$ donc Ω (6 ; 5 ; 4) est le point cherché et l'équation de (S) est alors :

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 36.$$

Variante analytique

Ω est sur (D) donc il existe s tel que $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 2s \\ y_\Omega = 1 - 2s \\ z_\Omega = 6 + s \end{cases}$

Les coordonnées de Ω doivent donc vérifier : $\begin{cases} x_\Omega = 10 + 2s \\ y_\Omega = 1 - 2s \\ z_\Omega = 6 + s \end{cases}$ et $(x_\Omega - 10)^2 + (y_\Omega - 1)^2 + (z_\Omega - 6)^2 = 36$.

calcul de s :

$(10 + 2s - 10)^2 + (1 - 2s - 1)^2 + (6 + s - 6)^2 = 36 \Leftrightarrow 4s^2 + 4s^2 + s^2 = 36 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 9s^2 = 36 \Leftrightarrow s = 2$ ou $s = -2$

Si s = 2, Ω (14 , – 3; 8) et si s = – 2 alors : Ω (6 ; 5 ; 4) On retrouve les mêmes points.

Exercice 4 : *(4 points)*

Partie A *Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4i|$.

a. : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;

b : (E) est la droite (ST) ;

c : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

$|z-3| = |3-4i| \Leftrightarrow MS = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow MS = 5 \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(S, 5)$

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;

b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;

c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

$\frac{z-b}{c-a} \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (BM) \perp (AC)$

Dans le triangle ABC on peut dire que M est sur la hauteur issue de B

De même, dans le triangle ABC, $\frac{z-c}{b-a} \in i\,\mathbb{R}$ signifie que m est sur la hauteur issue de C

3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4 i, et C un point du cercle de diamètre [AB].
On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G - 3 - 2{,}5\,i| = \frac{5}{6}$;

b. $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$;

c. $z_G - (3+2{,}5\,i) = \frac{1}{3}(4+3i)$.

On note I le milieu de [AB]. On a $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i+5+4i}{2} = 3 + 2{,}5\,i$.

C est sur le cercle de diamètre [AB] dc ABC est rectangle en C donc la m&édiane issue de c mesure la mopitié de la longueur de l'hypothénuse [AB] donc $CI = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2}}{2} = \frac{16+9}{2} = \frac{5}{2}$

Dans le triangle ABC le centre de gravité G est situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane donc $IG = \frac{IC}{3} = \frac{5}{6}$

On a donc bien $|z_G - 3 - 2{,}5\,i| = \frac{5}{6}$

Partie B : Déterminer les nombres complexes z tels que les points M(1), M'(z^2) et M'' ($\frac{1}{z^2}$) soient alignés.

Affixe de $\overrightarrow{MM'}$: $z^2 - 1$

Affixe de $\overrightarrow{MM''}$: $\frac{1}{z^2} - 1 = \frac{1-z^2}{z^2}$ avec $z \neq 0$.

M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ colinéaires c'est à dire ∀il existe k réel tel que $1 - z^2 = k \times \frac{1-z^2}{z^2}$

On a : $1 - z^2 = k \times \frac{1-z^2}{z^2} \Leftrightarrow \frac{1-z^2}{z^2-1} = k \times \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z^2 = k$.

On a donc M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R}$ (avec $z \neq 0$)

Si $z = \rho\, e^{i\theta}$ alors $-z^2 \Leftrightarrow z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

l'ensemble cherché est l'union de l'axe des imaginaires purs et de l'axe des réels privé du point O.

variante

$z = x + i\,y$ donc $z^2 = x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y$

$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\,i\,x\,y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

l'ensemble cherché est l'union de l'axe des imaginaires purs et de l'axe des réels privé du point O.