

Exercice 1 Le plan complexe \mathcal{S} est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

4 points

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par (\mathcal{C}) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1° Déterminer le centre Ω du cercle (\mathcal{C}) et calculer son rayon.

2° Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i}$

Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (\mathcal{C}) .

3° Sur le cercle (\mathcal{C}) , on considère le point E, d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radians de $(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$

a) Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

4° Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4} \left(z + \frac{1}{2} \right)$$

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r .

Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 2 On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n , qui sont

définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$

8 points

PARTIE A

I : Etude des fonctions f_n

1° Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est :

$$n - 2 - 2n \ln(x).$$

2° Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$

3° Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

4° Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n .

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm). On note (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1° Tracer (\mathcal{C}_2) et (\mathcal{C}_3) .

2° a) Calculer $f_{n+1} - f_n$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (\mathcal{C}_n) à partir de (\mathcal{C}_2) et (\mathcal{C}_3) .

PARTIE B Calculs d'aires

1° Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

2° En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (\mathcal{C}_n) et (\mathcal{C}_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

3° On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (\mathcal{C}_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.

a) Calculer A_2 .

b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Exercice 3 On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

4 points

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite $[AE)$ défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a} \overrightarrow{AE}$

1°. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a .

2° Soit K le barycentre du système de points pondérés : $\{(M ; a^2), (B ; 1), (D ; 1)\}$.

a) Exprimer \overrightarrow{BK} en fonction de \overrightarrow{BM} et de \overrightarrow{BD} .

b) Calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

c) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

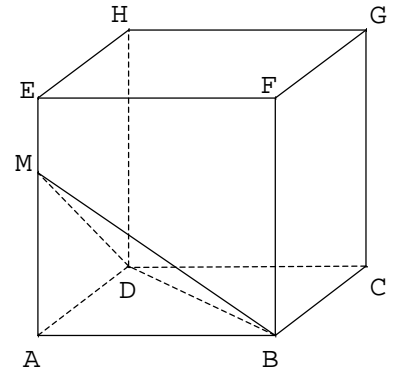
d) Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3° Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4° a) Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2 + 2}}{2a}$ unité d'aire.

b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire.

Déterminer la distance AK dans ce cas.



Exercice 4 Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.

4 points

Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.

Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.

On considère les événements suivants :

A_1 : « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 : « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

B_1 : « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

B_2 : « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1° a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants : $p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ et $p(A_1 \cap A_2)$

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante.

Aucune justification n'est demandée pour cette question.

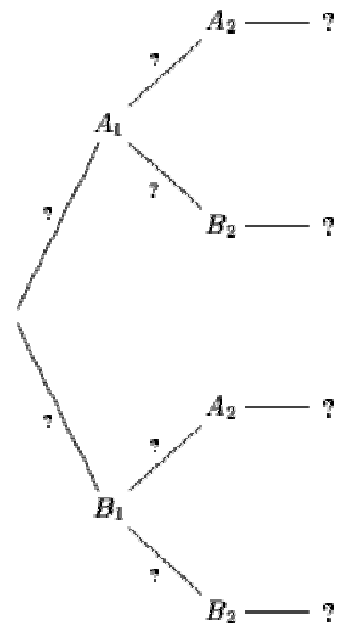
d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \frac{8}{11}$.

2° Le prix du billet pour le film A est de 4,5 € et de 3 € pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .



Exercice 1 1° Milieu de $[AB]$ $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 - 2i + (-2 + 2i)}{2} = -\frac{1}{2}$ le centre Ω de (C) est le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

le rayon est égale à : $\frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2 + 2i - (1 - 2i)|}{2} = \frac{|-3 + 4i|}{2} = \frac{\sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{5}{2}$

$$2^\circ z_D = \frac{3 + 9i}{4 + 2i} = \frac{(3 + 9i)(4 - 2i)}{16 + 4} = \frac{12 - 6i + 36i + 18}{20} = \frac{30i + 30}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

$$\left| z_D + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \right| = \left| 2 + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \text{ donc } \boxed{D \in (C)}$$

3° a) $z_E + \frac{1}{2}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega E}$ on a donc : $\left| z_E + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2}$ car $E \in \mathcal{C}\left(\Omega, \frac{5}{2}\right)$ et

$\arg\left(z_E + \frac{1}{2}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{\Omega E}) = (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$. ($\overrightarrow{\Omega I} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$ donc $\overrightarrow{\Omega E}$ et \vec{u} colinéaires de même sens)

$$b) z_E - z_\Omega = \frac{5}{2} e^{i\pi/4} \text{ donc } z_E = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$$

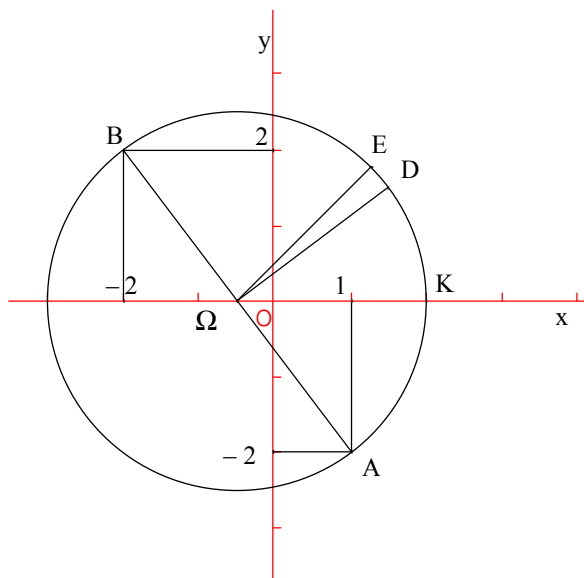
4° a) $z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4} \left(z + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow z' - z_\Omega = e^{i\pi/4} (z - z_\Omega)$ donc r est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{4}$

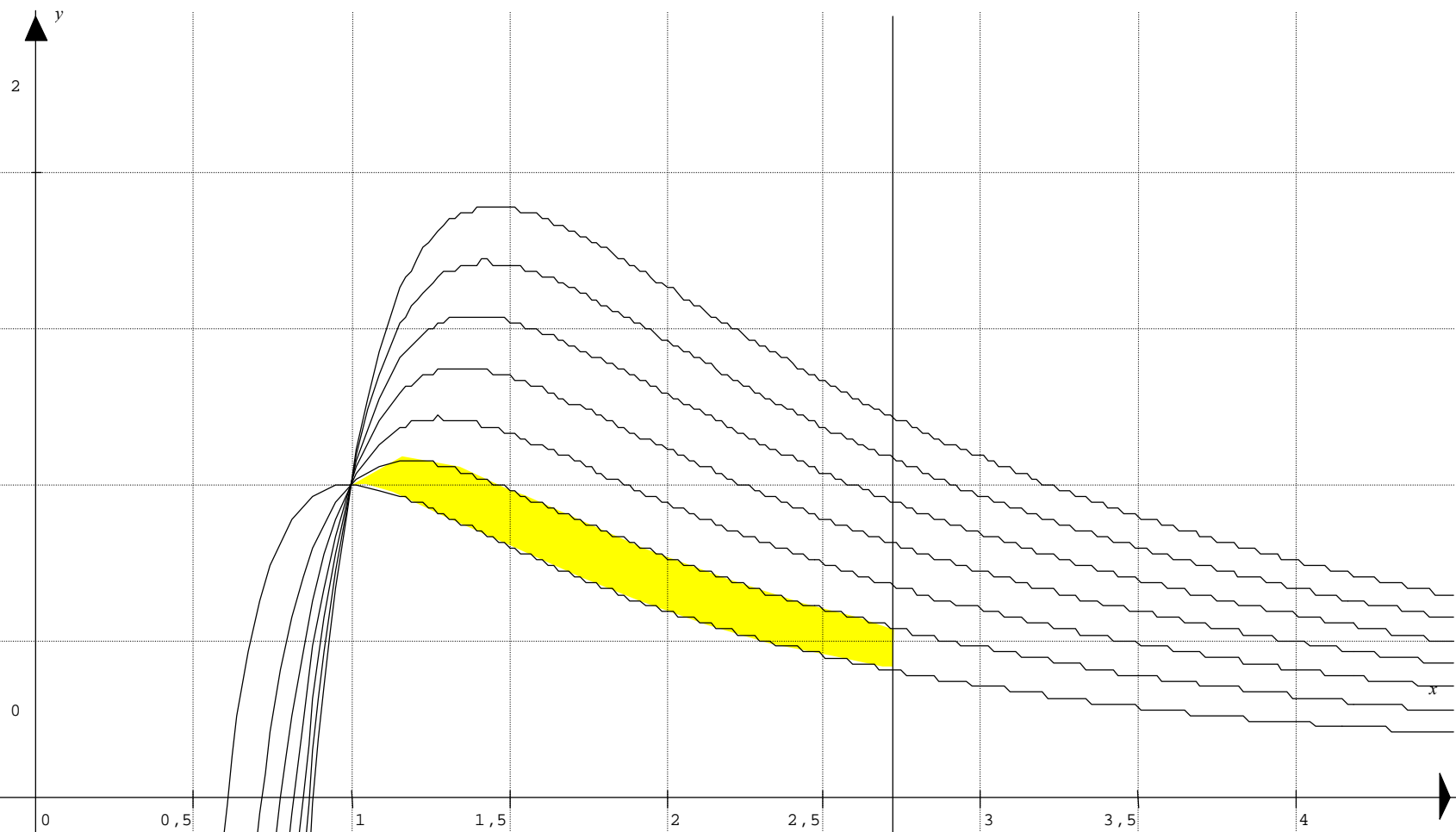
$$b) z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4} \left(z_K + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(2 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i = z_E$$

$$\left| 2 + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2} \text{ donc } K \in (\mathcal{C}) \text{ et donc } K' \text{ est aussi un point de } \mathcal{C}\left(\Omega, \frac{5}{2}\right) \text{ (r rotation de centre } \Omega)$$

De plus $(\overrightarrow{\Omega K'}, \overrightarrow{\Omega K}) = \frac{\pi}{4} = (\overrightarrow{\Omega K'}, \overrightarrow{\Omega I})$ car $\overrightarrow{\Omega K} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$, donc $\overrightarrow{\Omega K}$ est colinéaire de même sens que $\overrightarrow{\Omega I}$

$$\left. \begin{array}{l} (\overrightarrow{\Omega K'}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{4} \\ K' \in (\mathcal{C}) \end{array} \right\} \text{ donc } K' = E$$





$$\alpha_2 = 1 \text{ et } f(\alpha_2) = 1$$

$$\alpha_3 = e^{-1/3} \approx 0,7 \text{ et } f_3(\alpha_3) = 3/2 \times e^{-1/3} \approx 1,07.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 0} f_3(x).$$

Exercice 2 1° $f_n'(x) = \frac{\frac{n}{x} \times x^2 - 2x \times (1 + n \ln(x))}{x^4} = \frac{nx - 2x - 2nx \ln(x)}{x^4} = \frac{n - 2 - 2n \ln(x)}{x^3}$

2° $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{n - 2 - 2n \ln(x)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n \ln(x) > 0$ (car $x > 0$)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{n-2}{2n}$ (car $n > 0$) $\Leftrightarrow x < \exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)$ On note $\alpha = \exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)$

3° $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4° $f_n(\alpha) = \frac{1 + n \times \frac{n-2}{2n}}{\left(\exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)\right)^2} = \frac{n}{2} \exp\left(\frac{2-n}{n}\right)$

x	0	α	$+\infty$
signe de f'		+	0 -
f	$-\infty$	$f_n(\alpha)$	0

2° a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1 + (n+1) \ln(x)}{x^2} - \frac{1 + n \ln(x)}{x^2} = \frac{1 + n \ln(x) + \ln(x) - 1 - n \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$ indépendant de n.

La fonction $f_{n+1} - f_n$ est donc indépendant de n.

b) $f_3(x) - f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_n(x) - f_2(x) = (n-2) \times (f_3(x) - f_2(x))$

Soit x un réel > 0 . On note M_2 le point d'abscisse x de (\mathcal{C}_2) et M_3 le point d'abscisse x de (\mathcal{C}_3)

M_n est le point d'abscisse x de (\mathcal{C}_n) tel que : $\overline{M_2 M_n} = (n-2) \overline{M_2 M_3}$

On translate le point M_2 avec la translation de vecteur $(n-2) \overline{M_2 M_3}$.

PARTIE B 1° $I = \left[-\frac{1}{x} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

2° $\forall x \in [1; e], \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA $\mathcal{A} = I = 1 - \frac{2}{e}$

3° $\forall x \in [1; e], \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA on a :

$A_2 = \int_1^e \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + 2I = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e + 2I = -\frac{1}{e} + 1 + 2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 3 - \frac{5}{e}$

b) pour tout entier n supérieur ou égale à 2 f_n est positive sur $[1; e]$

$A_{n+1} = \int_1^e \frac{1 + (n+1) \ln(x)}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1 + n \ln(x)}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = A_n + I$

La suite (A_n) est arithmétique de raison I. I est en UA l'air de la portion du plan limité par les courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Exercice 3 1° $\text{Vol}(\text{ABDM}) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(\text{ABD}) \times \text{AM} = \frac{1}{3} \frac{\text{AD} \times \text{AB}}{2} \times \text{AM} = \boxed{\frac{1}{6a}}$

2° a) $(a^2 + 1 + 1) \overline{\text{BK}} = a^2 \overline{\text{BM}} + \overline{\text{BB}} + \overline{\text{BD}}$ donc $\boxed{\overline{\text{BK}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{BM}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{BD}}}$

b) $\overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{AM}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{BM}} \cdot \overline{\text{AM}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{BD}} \cdot \overline{\text{AM}}$
 $= \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{AM}} \cdot \overline{\text{AM}} + \frac{1}{a^2+2} \times 0 = \boxed{\frac{1}{a^2+2}}$

$\overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{AD}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{BM}} \cdot \overline{\text{AD}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{BD}} \cdot \overline{\text{AD}} = 0 + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{AD}} \cdot \overline{\text{AD}} = \boxed{\frac{1}{a^2+2}}$

$\overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{MD}} = \overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{MA}} + \overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{AD}} = -\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{a^2+2} = 0.$

c) $(a^2 + 2) \overline{\text{DK}} = a^2 \overline{\text{DM}} + \overline{\text{DB}} + \overline{\text{DD}}$ donc $\boxed{\overline{\text{DK}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{DM}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{DB}}}$

$\overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{MA}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{DM}} \cdot \overline{\text{MA}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{DB}} \cdot \overline{\text{MA}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{DM}} \cdot \overline{\text{MD}} = -\frac{1}{a^2+2}$

$\overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{AB}} = \frac{a^2}{a^2+2} \overline{\text{DM}} \cdot \overline{\text{AB}} + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{DB}} \cdot \overline{\text{AB}} = 0 + \frac{1}{a^2+2} \overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{AB}} = \frac{1}{a^2+2}$

$\overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{MB}} = \overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{MA}} + \overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{AB}} = -\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{a^2+2} = 0.$

d) $\left. \begin{array}{l} \overline{\text{BK}} \perp \overline{\text{MD}} \text{ Dans le triangle BDM, K est sur la hauteur issue de B} \\ \overline{\text{DK}} \perp \overline{\text{MB}} \text{ Dans le triangle BDM, K est sur la hauteur issue de D} \end{array} \right\} \text{ Donc K est l'orthocentre de BDM.}$

3° $\overline{\text{AK}} \cdot \overline{\text{MB}} = \overline{\text{AD}} \cdot \overline{\text{MB}} + \overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{MB}} = 0 + 0 = 0.$

En effet on a démontré que $\overline{\text{DK}} \cdot \overline{\text{MB}} = 0$ et comme $(\text{AD}) \perp (\text{AMB})$ alors la droite (AD) est orthonormale à toutes droites de (AMB) c'est à dire par exemple à (MB) donc $\overline{\text{AD}} \cdot \overline{\text{MB}} = 0.$

$\overline{\text{AK}} \cdot \overline{\text{MD}} = \overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{MD}} + \overline{\text{BK}} \cdot \overline{\text{MD}} = 0 + 0 = 0.$

La droite (AK) est donc la perpendiculaire au plan MBD passant par $\text{A}.$

Dans le solide AMBD c'est la hauteur issue de $\text{A}.$

4° a) K barycentre de $\{(M; a^2), (B; 1), (D; 1)\}$. donc K barycentre $\{(M; a^2), (I; 2)\}$ où I est le milieu de $[\text{BD}]$.

Dans le triangle BDM , la droite (MK) est donc la médiane issue de M et c'est aussi la hauteur issue de M . Le triangle MBD est donc isocèle en $\text{M}.$

$\text{BD} = \sqrt{2}$ et $\text{MI}^2 = \text{MB}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2+2}{2a^2}$ donc $\text{MI} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{2}a}$

$\text{Aire}(\text{MBD}) = \frac{1}{2} \text{MI} \times \text{BD} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{a^2+2}}{\sqrt{2}a} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} \text{UA}$

b) $\text{Aire}(\text{MBD}) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2} = 2a \Leftrightarrow a^2+2 = 4a^2 \text{ (tout est positif)} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{6}}{3}}$

$\text{Vol}(\text{ABDM}) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(\text{BDM}) \times \text{AK}$ donc $\frac{1}{3} \times 1 \times \text{AK} = \frac{1}{6a}$ $\boxed{\text{AK} = \frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{4}}$

Variante

A partir de la question 2° a) on peut introduire le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$

Dans ce repère $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $E(0,0,1)$

$$M\left(0,0,\frac{1}{a}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right) \text{ car } x_K = \frac{a^2 \times 0 + 1 + 0}{a^2+2}, y_K = \frac{a^2 \times 0 + 0 + 1}{a^2+2} \text{ et } z_K = \frac{a^2 \times (1/a) + 0 + 0}{a^2+2}$$

$$\overline{BK} \left(\frac{1}{a^2+2} - 1, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right) \text{ c'est à dire } \overline{BK} \left(\frac{-a^2-1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right), \overline{AM} \left(0, 0, \frac{1}{a}\right) \text{ et } \overline{AD} (0,1,0)$$

$$\overline{BK} \cdot \overline{BD} = -\frac{a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = \frac{1}{a^2+2} \text{ et } \overline{BK} \cdot \overline{AD} = \frac{a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a^2+2} \times 1 + \frac{a}{a^2+2} \times 1 = \frac{1}{a^2+2}$$

....

$$\text{c) } \overline{DK} \left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2} - 1, \frac{a}{a^2+2}\right) \text{ donc } \overline{DK} \left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{-a^2-1}{a^2+2} - 1, \frac{a}{a^2+2}\right) \text{ et } \overline{MB} \left(1, 0, -\frac{1}{a}\right)$$

$$\overline{DK} \cdot \overline{MB} = \frac{1}{a^2+2} \times 1 + \frac{-a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{a}{a^2+2} \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0.$$

...

$$3^\circ \overline{AK} \left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right) \text{ et } \overline{MB} \left(1, 0, -\frac{1}{a}\right) \text{ et } \overline{MD} \left(0, 1, -\frac{1}{a}\right)$$

$$\overline{AK} \cdot \overline{MB} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = 0 \text{ et } \overline{AK} \cdot \overline{MD} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = 0$$

....

$$4^\circ \text{ a) Soit } I \text{ le milieu de } [BD]. \text{ On a } I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } M\left(0,0,\frac{1}{a}\right) \text{ donc } MI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{a^2+2}{2a^2}$$

$$MI = \sqrt{\frac{a^2+2}{2a^2}} \text{ et } BD = \sqrt{2} \text{ donc : Aire de BDM} = \frac{1}{2} BD \times MI = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{a^2+2}{2a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$$

Exercice 4 On peut faire un tableau ou un arbre (de dénombrement).

1° a) sur 22 personnes 8 vont voir a la première semaine : $p(A_1) = \frac{8}{22}$

Sur les 14 personnes qui ont vu le film B en première semaine 2 vont revoir le film B et les 14 - 2 restantes vont voir la film A en deuxième semaine.

Sur les 8 personnes qui ont vu le film A en première semaine 4 vont revoir le film A

$$p(A_2) = \frac{12 + 4}{22} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

b) Sur les 8 personnes qui ont été voir A en première semaine 4 ont été le revoir

$$p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Sur les 22 - 8 = 14 personnes qui ont été voit B en première semaine 14 - 2 ont été le revoir.

$$p_{B_1}(A_2) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Parmi ceux qui ont vu A la première semaine 4 vont revoir le film A

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{22}$$

d) On utilise la loi des probabilités totales.

$$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_2) = p(A_2) \times p_{A_1}(A_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(A_2)$$

$$= \frac{4}{22} + \frac{12}{22} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

2° a)

X	6 €	7,5 €	9 €
p	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$

$$P(X = 6) = p(B_1 \cap B_2) = \frac{14}{22} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{11}$$

$$P(X = 7,5) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_1) = \frac{8}{22} \times \frac{1}{2} + \frac{14}{22} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

$$P(X = 9) = p(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

$$b) E(X) = 6 \times \frac{1}{11} + 7,5 \times \frac{8}{11} + 9 \times \frac{2}{11} = \frac{6 + 60 + 18}{11} = \frac{84}{11} \approx 7,64$$

	A2	B2
A1	4	14 - 2 = 22 - 6 16 - 4
B1	8 - 4	2 4 + 2
	8	22 - 8 22

