COMPLEXE

I INTRODUCTION

1° Un peu d'histoire.

Au début du XVlème siècle, en pleine renaissance italienne, d'éminent algébristes italiens Nicolo Tartaglia, Giralomo Cardano, Scipione del Ferro, Antonio Ferrari et Antonio Maria Fior se " battent à coup de calculs algébriques " pour établir une formule permettant de déterminer une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 = px + q$.

En 1547 Cardan publie dans Ars Magna les formules suivantes

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation : $x^3 - 15x = 4$.

Il obtient littéralement

$$X = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, a priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$.

Pour contourner ce problème Bombelli, crée de nouveaux nombres: les nombres complexes et en particulier le nombre qu'il note $\sqrt{-1}$ vérifiant l'égalité $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$.

Il remarque alors qu'en utilisant les règles usuelles de calcul il peut dire :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 3 \times 4\sqrt{-1} + 3 \times 2\sqrt{-1}^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} - 1 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 3 \times 4\sqrt{-1} + 3 \times 2\sqrt{-1}^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} - 1 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Et donc $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 + \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 4$ est solution.

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Jusqu'au début du XIX^e siècle, les racines carrées de -1 furent souvent notées , $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

Cette notation conduit à des contradictions. Effectuer le produit $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$.

- d'une part en appliquant la définition d'une racine carrée;
- d'autre part en appliquant la règle $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

La présence du symbole $\sqrt{\ }$ incite à appliquer une règle uniquement valable pour des réels positifs.

Pour éviter ce type d'erreur Euler proposa en 1777 de remplacer les symboles $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ par i et $-$ i.

Ainsi : $i^2 = -1$ et $(-i)^2 = -1$. Cette notation, reprise par Gauss, est toujours utilisée.

2° construction d'ensemble de nombres.

" Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme. "

Cette phrase, attribuée au mathématicien allemand Kronecker (18231891), met en valeur l'idée qu'il est possible de construire, à partir des entiers naturels, de nouveaux ensembles de nombres.

De $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$

Résoudre dans $\mathbb{N}$, puis dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $5 + x = 1$.

De $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q}$

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Q}$, l'équation : $3x = 2$.

De $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{R}$, l'équation: $x^2 = 2$.

De $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$

L'équation $x^2 - 1$ n'a pas de solution réelle.

Elle a deux solutions dites complexes : i et $-$ i.

Remarques :

Le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ n'est pas « algébrique »

Le réel π n'est solution d'aucune équation de type $P(x) = 0$ où P est un polynôme à coefficients complexes.

III FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1° Définition

On admet l'existence d'un nouvel ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres appelé complexes tel que

- Il existe dans $\mathbb{C}$un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

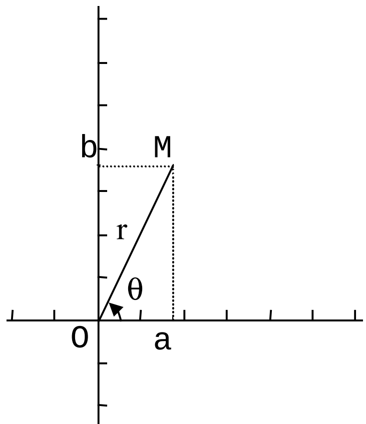
Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

On note $z = a + i\, b$

Cette écriture est dite **forme algébrique** du nombre complexe.

Le réel a est la **partie réelle** du nombre complexe On note $a = \mathrm{Re}\,(a + i\, b)$

Le réel b est **la partie imaginaire** du nombre complexe On note $b = \mathrm{Im}\,(a + i\, b)$



Remarque

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.
- i n'est pas un nombre réel puisque son carré est négatif.
- L'écriture d'un nombre complexe sous la forme algébrique est unique.

Nombres complexes particuliers

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- si $a = 0$, on a $z = i\, b$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

2° Égalité de deux nombres complexes

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$a + i\, b = a' + i\, b' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

3° Représentation géométrique d'un nombre complexe

L'ensemble des réels est représenté par une droite graduée appelée droite des réels.

L'ensemble des complexes sont représenté par un plan muni d'un repère orthonormal direct appelé plan complexe.

Affixe d'un point

- A tout nombre complexe $z = x + i\, y$ avec x et y réel, on associe le point M de coordonnées (x; y).

On dit que M est le point image de z

- A tout point M du plan de coordonnées (x , y) on associe le complexe $x + i\, y$.

On dit que $x + i\, y$ est l'affixe du point M et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.

Affixe d'un vecteur.

- A tout nombre complexe $z = x + i\, y$ avec x et y réel, on associe le vecteur $\overrightarrow{U}$de coordonnées (x; y).

On dit que $\overrightarrow{U}$ est le vecteur image de z

- A tout vecteur $\overrightarrow{U}$ de coordonnées (x , y) on associe le complexe $x + i\, y$.

On dit que $x + i\, y$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{U}$.

L'axe des abscisses (O;-.$\vec{u}$) est appelé axe des réels,

l'axe des ordonnées (O;-.$\vec{v}$) est appelé axe des imaginaires purs.

4° Opérations sur les nombres complexes

- Somme

$(a + i\, b) + (a' + i\, b') = a + a' + i\,(b + b')$

Remarque. Géométriquement.

Si $\overrightarrow{U}$ est le vecteur d'affixe z et si $\overrightarrow{V}$ est le vecteur d'affixe z' alors le vecteur $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ a pour affixe $z + z'$

- Produit

$(a + i\, b) \times (a' + i\, b') = a\, a' + i\, a\, b' + i\, b\, a' + i^2\, b\, b' = a\, a' - b\, b' + i\,(a\, b' + a'\, b)$ $\quad (i^2 = -1)$

Remarque. Géométriquement on ne peut interpréter le produit de deux complexes excepté si l'un est réel.

Si λ est un réel et si $\overrightarrow{U}$ est le vecteur d'affixe z alors le vecteur $\lambda\, \overrightarrow{U}$ a pour affixe $\lambda\, z$.

- Inverse

Pour tout z non nul on a : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i\,b} = \frac{a - i\,b}{a^2 + b^2}$

- Quotient.

Pour tout z' non nul $\frac{z}{z'} = \frac{a + i\,b}{a' + i\,b'} = (a + i\,b) \times \frac{1}{a' - i\,b'} = \frac{(a + i\,b) \times (a' - i\,b')}{a'^2 + b'^2}$

- Les identités remarquables suivantes restent vraies dans le cas où A et B sont des nombres complexes:

$(A + B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$ $\quad (A - B)^2 = A^2 - 2\,A\,B + B^2$ $\quad A^2 - B^2 = (A + B)\,(A - B)$.

$(A + B)^3 = A^3 + 3\,A^2\,B + 3\,A\,B^2 + B^3$ $\quad (A - B)^3 = A^3 - 3\,A^2\,B + 3\,A\,B^2 - B^3$

- On a ce nouveau résultat dans $\mathbb{C}$: $A^2 + B^2 = (A + i\,B)\,(A - i\,B)$.

Exemple puissances de i.

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

$i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$

…

$i^{5n+1} = i$, $i^{5n+2} = -1$, $i^{5n+3} = -i$, $i^{5n+4} = 1$

5° Conjugué d'un nombre complexe

a) Définition :

On appelle conjugué du complexe z = a + i b le complexe, noté $\overline{z}$, a – i b

$\overline{a + i\,b} = a - i\,b$

b) Conjugués et opérations :

Soit z et z' deux nombres complexes : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

c) Propriété : soit z = a + b i un nombre complexe : $z \times \overline{z'} = a^2 + b^2$

$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ $\qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}$

z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$. $\qquad$ z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

6°Affixes et géométrie.

Affixe du milieu : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Affixe d'un barycentre : $z_G = \frac{\alpha\, z_A + \beta\, z_B}{\alpha + \beta}$

Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$

Somme de deux vecteurs produit d'un vecteur par un réel : $\vec{u}$ d'affixe z alors k $\vec{u}$ a pour affixe k z.

II MODULE ET ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

1° Rappel : coordonnées polaires

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit M un point de coordonnées (a ; b) .

Si $M \neq O$ on dit que $(r\,;\,\theta)$ est un couple de coordonnées polaires de M lorsque :

$r = OM$ et $\theta = (\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OM})\ [2\,\pi]$

On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\quad a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Si z est l'affixe de M, $z = a + i\,b = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

Remarque

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |\,x\,|$

2° Forme trigonométrique d'un complexe

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$z = z' \iff r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta') \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\ \ [2\,\pi] \end{cases}$

Forme trigonométrique, forme algébrique.

$$a + i\,b = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ si et seulement si } \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + i\,b \text{ si et seulement si } \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

3° Module d’un nombre complexe.

a) Définition.

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + i\,b$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle module de z le nombre **réel positif** $r = OM = \sqrt{a^2+b^2}$

On le note $r = |z|$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$

Remarque

Quand $z = x$ est un nombre réel, on a $r = OM = |z| = |x|$.

Pour un réel x, $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".

Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

b) Exemples

Calculer le module de chacun des nombres complexes :

$3 + 2i$	$1 - i$	$2 - \dfrac{i}{3}$	$\sqrt{2} + i\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) Propriété

Soit $\vec{v}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\vec{v}\| = |z|$.

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$.

d) Module d'une somme, d'un produit.

$\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert \overline{z} \rvert = \lvert z \rvert$ $\quad \lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$

$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	si $z \neq 0$, $\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z \rvert}$	si $z' \neq 0$, $\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$

$z \times \overline{z} = \lvert z \rvert^2$	Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{\lvert z \rvert^2}$

4° Argument d'un complexe.

Soit le nombre complexe **non nul** z de forme algébrique $a + i\,b$ et soit M le point d'affixe z.

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

On note $\theta = \arg(z)$

Remarque

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π.

b) Argument d’un réel, d’un imaginaire pur

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = 0$ ou $\arg z = \pi$ (modulo 2π)

$z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π)

c) Argument du conjugué, de l’opposé

Si $\arg z = \theta$ alors $\arg(\overline{z}) = -\theta$ (modulo 2π)

Si $\arg z = \theta$ alors $\arg(-z) = \theta + \pi$. (modulo 2π)

d) Argument d’un produit, d’un quotient

$\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

$\arg z^n = n \times \arg z$