**1** 1° Résoudre l'équation $(1 + i) z = 3 - 2 i$, donner la solution sous la forme algébrique.

2° Le nombre complexe $2 - i$ est-il solution de l'équation $(1 - i) z + 1 + 3 i = 0$ ?

3° Le nombre complexe $\dfrac{1 + 3 i}{5}$ est-il solution de l'équation $5 z^2 - 2 z + 2 = 0$ ?1

**2** 1° Calculer le module de chacun des nombres complexes :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1 = 3 + 4 i$ | $z_2 = 1 - i$ | $z_3 = 5 - \dfrac{i}{2}$ | $z_4 = 3$ | $z_5 = i - 4$ | $z_6 = i$ | $z_7 = - 5$ | $z_8 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$ |

2° Soit a un nombre réel. Calculer le module du nombre suivant : $z = \dfrac{a i - 1}{a i + 1}$

3° Donner les formes trigonométriques de :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $z_1 = 1 + i$ | $z_2 = \sqrt{3} + i$ | $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ | $z_4 = i$ | $z_5 = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ |

**3** On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer $j^2$, $j^3$ et $1 + j + j^2$. Déterminer la forme trigonométrique des complexes j et $j^2$
Représenter sur le cercle trigonométrique les complexes 1 , j et $j^2$. Retrouver le résultat de $1 + j + j^2$.

**4** 1° Représenter l'ensemble des points M d'affixe z telle que

| | |
|---|---|
| a) $\lvert z - i \rvert = \lvert z + 1\rvert$ | b) $\lvert z + 1 - i \rvert = \sqrt{2}$. |

2° Donner dans chacun des cas une équation cartésienne de l'ensemble obtenu.
3° Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z telle que

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\lvert i z - 1 \rvert = \lvert z + 2 - 3 i \rvert$ | b) $\lvert - z + 1 \rvert = \lvert \overline{z} \rvert$ | c) $\lvert 2 z - i \rvert = \lvert 2 (1 - z) \rvert$ | d) $\lvert - (z - 1) \rvert = 2$. |

**5** 1° Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2 i \overline{z} = 0$

(on pourra poser $z = x + i y$ avec x et y réels ).
2° On note O, A, B et C les points images des solutions dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{u}, \vec{v})$.
Placer ces points sur une figure et montrer que ABC est un triangle équilatéral.

**6** Déterminer les nombres complexes tels que :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° $\dfrac{z - i}{z + i} = i$ | 2° $i z + (1 + i) \overline{z} = 1$ | 3° $z^2 + 2 \overline{z} - 1 = 0$ | 4° $2 i z - 3 = z - 4 i$ |

**7** Montrer que $\lvert z + 1 \rvert^2 = 2 \lvert z \rvert^2$ équivaut à $\lvert z - 1 \rvert^2 = 2$.

En déduire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $\lvert z + 1 \rvert = \lvert \sqrt{2}\, z \rvert$.

**8** 1° a) Déterminer les nombres complexes z tels que les points M, M' et M" d'affixes respectives z, $\dfrac{1}{z}$ et $z + 1$ soient sur un même cercle de centre O.
b) Représenter les points M, M' et M".

2° Déterminer les nombres complexes z tels que les points M, M' et M" d'affixes respectives 1, $z^2$ et $\dfrac{1}{z^2}$ soient alignés.
3° Déterminer les nombres complexes z tels que les points M, M' et M" d'affixes respectives 1, z et $z^2$ forment un triangle rectangle isocèle.

**9** Soit M, M' et M" les points du plan complexe d'affixes respectives: z, $z + i$ et $i z$.

**1°** Pour quel nombre complexe z a-t-on M' = O, origine du repère ? Pour quel nombre a-t-on M' = M " ?

**2°** a) On suppose z distinct de 0, de $- i$ et $\dfrac{1 - i}{2}$

Prouver que les points O, M' et M" sont alignés si et seulement si $\dfrac{z + i}{iz}$ est un nombre réel.

b) On pose $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, avec $z \neq 0$. Calculer $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z + i}{iz}\right)$ en fonction de x et y.

**3°** Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que O, M' et M" sont deux à deux distincts et alignés.

$\boxed{1}$ 1° $(1 + i)\, z = 3 - 2\,i \Leftrightarrow z = \dfrac{3 - 2\,i}{1 + i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}\,i.$

2° $(1 - i)(2 - i) + 1 + 3\,i = 2 - i - 2\,i - 1 + 1 + 3\,i = 2 \neq 0$

3° $5\left(\dfrac{1 + 3\,i}{5}\right)^2 - 2\,\dfrac{1 + 3\,i}{5} + 2 = 5 \times \dfrac{1 + 6\,i - 9}{25} - \dfrac{2 + 6\,i}{5} + 2 = \dfrac{1 + 6\,i - 9 - 2 - 6\,i}{5} + 2 = -2. + 2 = 0$

---

$\boxed{2}$ 1° $|\,z_1\,| = \sqrt{9 + 16} = 5$ | $|\,z_2\,| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ | $|\,z_3\,| = \sqrt{25 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{101}}{2}$ | $|\,z_4\,| = 3$

$|\,z_5\,| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$ | $|\,z_6\,| = 1$ $\quad |\,z_7\,| = 5$ | $|\,z_8\,| = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 1$

2° $|\,z\,| = \left|\dfrac{a\,i - 1}{a\,i + 1}\right| = \dfrac{|\,a\,i - 1\,|}{|\,ai + 1\,|} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1$

3° $z_1 = \left[\sqrt{2}\,,\dfrac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ | $z_2 = \left[2\,,\dfrac{\pi}{6}\right] = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_3 = \left[2\,, -\dfrac{\pi}{3}\right] = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ | $z_4 = \left[1\,,\dfrac{\pi}{2}\right] = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ $\quad z_5 = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$|\,z_5\,| = \sqrt{9 \times 2 + 6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$ $\cos\theta_5 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{12}}{2 \times 6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_5 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$ Donc $z_5 = \left[2\sqrt{6}\,,\dfrac{\pi}{6}\right]$

---

$\boxed{3}$ $j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{1}{2} \times i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ | $j^3 = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} -+ \dfrac{3}{4} = 1.$

$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

Variante $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ car on a vu que $j^3 = 1$

A point d'affixe 1, B point d'affixe j et C le point d'affixe $j^2$. $j = \cos\dfrac{2\,\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\,\pi}{3}$ et $j^2 = \cos -\dfrac{2\,\pi}{3} + i\sin -\dfrac{2\,\pi}{3}$

ABC est un triangle équilatéral de centre O donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ donc $z_A + z_B + z_C = 0.$

On retrouve $1 + j + j^2 = 0.$

$\boxed{4}$ 1° a) Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe – 1. On obtient la médiatrice de [AB]

Analytiquement : $\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow x = -y$. On retrouve l'équation de la médiatrice de [AB].

b) Soit C le point d'affixe $-1+i$. On obtient le cercle $\mathcal{C}$ de centre C de rayon $\sqrt{2}$

2° Analytiquement : $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = 2$. On retrouve l'équation du cercle $\mathcal{C}$

.

---

3° a) $|iz-1| = |z+2-3i| \Leftrightarrow |i(z+i)| = |z-(-2+3i)| \Leftrightarrow |i|\,|z-(-i)| = |z-(-2+3i)|$

$\Leftrightarrow |z-(-i)| = |z-(-2+3i)|$. On obtient la médiatrice de [AB] avec A le point d'affixe $-i$ et B le point d'affixe $-2+3i$. Analytiquement : $|i(x+iy)-1| = |x+iy+2-3i| \Leftrightarrow |ix-y+1| = |x+2+i(y-3)|$

$\Leftrightarrow x^2+(-y-1)^2 = (x+2)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 = x^2+4x+4+y^2-6y+9$

$\Leftrightarrow -4x+2y+6y+1-4-9 \Leftrightarrow -4x+8y-12 = 0 \Leftrightarrow x-2y+3 = 0$.

b) $|-z+1| = |\overline{z}| \Leftrightarrow |-z+1| = |z|$ On obtient la médiatrice de [OA] avec A le point d'affixe 1

Analytiquement

$|-z+1| = |\overline{z}| \Leftrightarrow |-x+1-iy| = |x-iy| \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow 1-2x+x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

c) $|2z-i| = |2(1-z)| \Leftrightarrow 2\left|z-\frac{i}{2}\right| = 2|1-z|$. On obtient la médiatrice de [AB] avec A le point d'affixe $\frac{i}{2}$ et B le point d'affixe 1. Analytiquement. $|2z-i| = |2(1-z)| \Leftrightarrow |2x+2iy-i| = |2-2x-2iy|$

$\Leftrightarrow 4x^2+(2y-1)^2 = -(2-2x)^2+4y^2 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4y+1 = 4-8x+4x^2+4y^2 \Leftrightarrow 8x-4y-3 = 0$.

d) $|-(z-1)| = 2 \Leftrightarrow |z-1| = 2$. On obtient le cercle de centre A de rayon 2 avec A le point d'affixe 1.

Analytiquement : $|-(z-1)| = 2 \Leftrightarrow |-x-iy+1| = 2 \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2$.

---

$\boxed{5}$ 1° $z^2-2i\overline{z} = 0 \Leftrightarrow (x+iy)^2-2i(x-iy) = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy-2ix-2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2y = 0 \\ 2xy-2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ x^2-y^2-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y^2-2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x^2-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -2i \text{ ou } z = \sqrt{3}+i \text{ ou } z = -\sqrt{3}+i$

$A(-2i)$, $B(\sqrt{3}+i)$ et $C(-\sqrt{3}+i)$. $|z_A-z_B| = |\sqrt{3}-3i| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, $|z_B-z_C| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$,

$|z_C-z_A| = |-\sqrt{3}+3i| = 2$. $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$ donc ABC est un triangle équilatéral.

---

$\boxed{6}$ 1° $z \neq i$ : $\frac{z-i}{z+i} = i \Leftrightarrow z-i = iz-1 \Leftrightarrow z-iz = i-1 \Leftrightarrow z = \frac{i-1}{1-i} \Leftrightarrow z = -1$

2° $iz+(1+i)\overline{z} = 1 \Leftrightarrow i(x+iy)+(1+i)(x-iy) = 1 \Leftrightarrow ix-y+x-iy+ix+y = 1$

$x+i(2x+y) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

---

$\boxed{7}$ $|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 = 2(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2 = 2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-1 = 0$

$|z-1|^2 = 2. \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-1 = 0$

$|z+1| = |\sqrt{2}z| \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{2}$.

On obtient le cercle de centre I(1,0) de rayon $\sqrt{2}$

---

$\boxed{8}$ 1° a) M, M' et M'' d'affixes respectives $z$, $\frac{1}{z}$ et $z+1$ sont sur un même cercle de centre O

$\Leftrightarrow |z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z+1| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|}$ et $|z| = |z+1| \Leftrightarrow |z| = 1 = |z+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (x+1)^2+y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2+2x+1+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 1+2x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2° Les points M, M' et M'' sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ colinéaires.

$z^2 - 1$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ et $\frac{1}{z^2} - 1 = \frac{1 - z^2}{z^2}$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM''}$. Si $z = 1$ ou $z = -1$ les points M, M' et M'' sont alignés. Si $z \neq 0$, $z \neq 1$ et $z \neq -1$ on a : $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ colinéaires si et seulement si $\dfrac{\frac{1 - z^2}{z^2}}{z^2 - 1} \in \mathbb{R}$

$\dfrac{\frac{1 - z^2}{z^2}}{z^2 - 1} = -\frac{1}{z^2}$ donc : $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM''}$ colinéaires si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2\,i\,x\,y - y^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x\,y = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

On obtient les axes de coordonnées privés de O.

3° Les points M, M' et M'' forment un triangle rectangle isocèle en M si et seulement si

$MM' = MM''$ et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \pm\frac{\pi}{2}$

$z - 1$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ et $z^2 - 1$ est celui de $\overrightarrow{MM''}$ (avec $z \neq 1$)

$MM' = MM''$ et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \pm i \Leftrightarrow z + 1 = \pm i \Leftrightarrow z = -1 + i$ ou $z = -1 - i$.

Les points M, M' et M'' forment un triangle rectangle isocèle en M' si et seulement si

$MM' = M'M''$ et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'M''}) = \pm\frac{\pi}{2}$

$z - 1$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ et $z^2 - z$ est celui de $\overrightarrow{M'M''}$ .

$MM' = MM''$ et $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'M''}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z^2 - z}{z - 1} = \pm i \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$

Les points M, M' et M'' forment un triangle rectangle isocèle en M'' ssi $MM'' = M'M''$ et $(\overrightarrow{MM''}, \overrightarrow{M'M''}) = \pm\frac{\pi}{2}$

$z^2 - 1$ est l'affixe de $\overrightarrow{MM''}$ et $z^2 - z$ est celui de $\overrightarrow{M'M''}$ .

$MM'' = M'M''$ et $(\overrightarrow{MM''}, \overrightarrow{M'M''})$ $\pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z^2 - z}{z^2 - 1} = \pm i \Leftrightarrow \frac{z\,(z - 1)}{(z - 1)\,(z + 1)} = \pm i \Leftrightarrow \frac{z}{z + 1} = i$ ou $\frac{z}{z + 1} = -i$

$\Leftrightarrow z = i\,z + i$ ou $z = -i\,z - i \Leftrightarrow z - i\,z = i$ ou $z + i\,z = -i \Leftrightarrow z = \frac{i}{1 - i}$ ou $z = \frac{-i}{1 + i} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$\boxed{9}$ 1° $M = O \Leftrightarrow z = 0$ : $M' = M'' \Leftrightarrow z + i = i\,z \Leftrightarrow z - i\,z = -i \Leftrightarrow z = \frac{i}{i - 1} \Leftrightarrow z = \frac{i - 1}{2}$

2° a) O, M' et M'' alignés $\Leftrightarrow \frac{z'' - z_O}{z' - z_O} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z + i}{i\,z} \in \mathbb{R}$

b) $\frac{z + i}{i\,z} = \frac{x + i\,y + i}{i\,(x + i\,y)} = \frac{x + i\,y + i}{i\,x - y} = \frac{(x + i\,y + i)\,(-i\,x - y)}{x^2 + y^2} = \frac{-i\,x^2 - x\,y + x\,y - i\,y^2 + x - i\,y}{x^2 + y^2}$

$\mathrm{Im}\left(\frac{z + i}{iz}\right) = \frac{-x^2 - y^2 - y}{x^2 + y^2}$

3° $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \frac{-x^2 - y^2 - y}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right)$