## III NOTATION EXPONENTIELLE DES NOMBRES COMPLEXES

### 1° Complexe de module 1

Dans le plan complexe les points d'affixe de module 1 sont sur le cercle trigonométrique.
On sait que pour tout réel $\theta$ il existe un et un seul point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.
A tout réel $\theta$ on associe le complexe de module 1 d'argument $\theta$. On défini ainsi une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ .

$$\mathbf{f : \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta.}$$

Pour tout $\theta$ et $\theta'$ de $\mathbb{R}$ : $\mathbf{f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')}$

On note $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ Et pour tout complexe z on note $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}}$

### 2° Propriétés

| | | |
|---|---|---|
| $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ | $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ | $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$ |

$\boxed{\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}}$ remarque : z est un complexe de module 1 si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

### 3° formule de Moivre

$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

### 4° Formules d'Euler

$\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et } \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

### 5° Tableau récapitulatif : formes trigonométriques, forme exponetielle

Soient $\theta$ et $\theta'$ deux réels et soient z et z' deux nombres complexes non nuls, n est un entier relatif. On a :

| | | |
|---|---|---|
| $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ | $(\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$ | $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ |
| $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z$ | $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ | $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta)}$ |
| $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ | $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$ | $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ |
| $\arg(z^n) = n\arg z$ | $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ | $(e^{i\theta})^n$ |
| $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ | $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ | $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ |
| $\arg(-z) = \arg z + \pi$ | $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$ | $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ |

---

**Baccalauréat S Antilles – Guyane juin** 2005 $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe −1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans P qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point M′ = F(M) d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$

1° a) Soit E le point d'affixe $e^{i\pi/3}$ , on appelle E′ son image par F.
Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.
2° a) Soit K le point d'affixe $2\,e^{i\pi/6}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.
b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.
3° On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$.
R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.
a) Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$
En déduire que : $|z' + 1| = |z'|$.
b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in\ ]-\pi, \pi[$ , montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du a).