

ELECTRO-DIVAGATIONS

A Suite convergente affichée « computo-divergente »

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{3}$ et $U_{n+1} = 4 U_n - 1$. Compléter le tableau ci-dessous.

n	0	5	10	20	30	50
U_n						

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = \frac{1}{3}$.

B Suite convergente affichée « computo-convergente », de limite distincte

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \sqrt{3}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{1 - U_n}$ pour tout entier naturel

Compléter rapidement le tableau ci-dessous.

n	0	5	10	20	40	60	90
U_n							

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = \sqrt{3}$

C Suite divergente affichée « computo-convergente »

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 100\,000$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n^2}$ pour tout entier naturel n .

Compléter rapidement le tableau ci-dessous.

n	0	50	100	200	250	300	450
U_n							

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

Démontrer que la suite (U_n) ne peut pas converger.

D Epilogue

Comment expliquer les résultats aberrants donnés par la calculatrice dans ces trois situations ?

ELECTRO-DIVAGATIONS

A Suite convergente affichée « computo-divergente »

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{3}$ et $U_{n+1} = 4 U_n - 1$. Compléter le tableau ci-dessous.

n	0	5	10	20	30	50
U_n	$\frac{1}{3}$	0,333333333325	0,333333324595	0,324170736435	-9607,34587172	-1,05637550019 10^{16}

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

La suite (U_n) semble tendre vers $-\infty$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = \frac{1}{3}$.

Initialisation :

$U_0 = \frac{1}{3}$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité :

Considérons un entier k tel que $U_k = \frac{1}{3}$.

Démontrons que $U_{k+1} = \frac{1}{3}$

$U_{k+1} = 4 U_k - 1$ par définition,

donc $U_{k+1} = \frac{4}{3} - 1$ car $U_k = \frac{1}{3}$

donc $U_{k+1} = \frac{1}{3}$

Conclusion :

la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc toujours vraie.

Pour tout entier naturel n , $U_n = \frac{1}{3}$

B Suite convergente affichée « computo-convergente », de limite distincte On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \sqrt{3}$ et

$U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{1 - U_n}$ pour tout entier naturel n . Compléter rapidement le tableau ci-dessous.

n	0	5	10	20	40	60	90
U_n	$\sqrt{3}$	1,73205080755	1,7320508195	1,73831757307	-1,73205081455	-1,73205080757	-1,73205080757

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

La suite (U_n) semble converger vers $-\sqrt{3}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = \sqrt{3}$

Initialisation :

$U_0 = \sqrt{3}$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité :

Considérons un entier k tel que $U_k = \sqrt{3}$.

Démontrons que $U_{k+1} = \sqrt{3}$

$U_{k+1} = \frac{U_k - 3}{1 - U_k}$ par définition,

donc $U_{k+1} = \frac{\sqrt{3} - 3}{1 - \sqrt{3}}$ car $U_k = \sqrt{3}$

donc $U_{k+1} = \frac{(\sqrt{3} - 3)(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} + 3 - 3 - 3\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$

Conclusion :

la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc toujours vraie.

Pour tout entier naturel n , $U_n = \sqrt{3}$

C Suite divergente affichée « computo-convergente » On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 100\ 000$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n^2}$ pour tout entier naturel n . Compléter rapidement le tableau ci-dessous.

n	0	50	100	200	250	300	450
U_n	100 000	100000	100000	100000	100000	100000	100000

Que peut-on conjecturer pour la suite (U_n) ?

La suite (U_n) semble converger vers 100 000.

Démontrer que la suite (U_n) ne peut pas converger.

Démontrons par l'absurde que la suite (U_n) ne peut pas converger

Supposons que la suite (U_n) converge vers ℓ

La suite (U_n) est strictement croissante donc pour tout entier naturel n : $U_n \geq 100\ 000$.

Donc $\ell \neq 0$.

En appliquant les règles de calcul sur les limites on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(U_n + \frac{1}{U_n} \right) = \ell + \frac{1}{\ell^2}$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell + \frac{1}{\ell^2}$

On sait aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$

On doit donc avoir : $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}$

$\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ell^2} = 0$ ce qui est impossible.

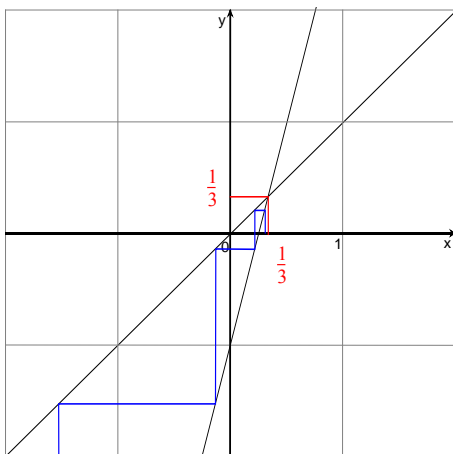
La suite (U_n) ne peut donc pas converger vers une limite finie.

D Epilogue Comment expliquer les résultats aberrants donnés par la calculatrice dans ces trois situations ?

Pour calculer u_n les calculatrices calculent tous les U_k pour $k \leq n$ et en faisant ces calculs intermédiaires elles accumulent les erreurs jusqu'à faire apparaître des résultats aberrants

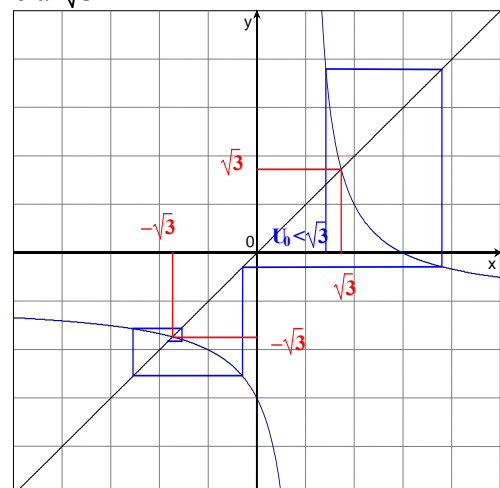
Avec une calculatrice capable de faire des calculs exacts les deux premiers exercices donnent toujours le même résultat $\frac{1}{3}$ pour le [1] et $\sqrt{3}$ pour le [2].

Une calculatrice qui travaille avec des valeurs approchées donne à U_0 une valeur légèrement inférieure à $\frac{1}{3}$



En partant d'une valeur de U_0 légèrement inférieure à $\frac{1}{3}$ voilà ce qu'on obtient graphiquement.

Une calculatrice qui travaille avec des valeurs approchées donne à U_0 une valeur légèrement inférieure à $\sqrt{3}$



En partant d'une valeur de U_0 légèrement inférieure à $\sqrt{3}$ voilà ce qu'on obtient graphiquement.

En revanche, pour le troisième exercice, même les calculatrice qui travaillent avec des valeurs "exactes" donnent toujours le même résultat 100 000. Très rapidement (pour U_5) elles passent aux calculs approchés et ne peuvent alors prendre en compte le $\frac{1}{U_n} \approx 10^{-10}$ ($100\ 000 + 10^{-10}$ a 16 chiffres)