Devoir maison n° 1 A rendre le 21 septembre 2005

$\boxed{1}$ On considère la fonctions définie sur $]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

1° Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet la droite $\mathscr{D}$ d'équation " $x = -1$ " comme axe de symétrie.

On étudie donc f sur [1 ; + ∞ [

2° Soit la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Etudier les variations de g(x).

En déduire les variations de f sur $[1 ; +\infty[$.

3° Prouver que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ d'équation " $y = x + 1$ " et préciser les positions respectives de $\mathscr{C}_f$ et Δ .

4° Etude de la dérivabilité de f en 1.

Etudier la limite à droite au point 1 du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Peut-on dire que f est dérivable en 1 ?

On admettra que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 .

5° Tracer Δ puis $\mathscr{C}_f$ en utilisant l'axe de symétrie $\mathscr{D}$.

$\boxed{2}$ 1° Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie sur $]-\infty ; 4,5[$ par

$f(x) = \dfrac{x - 8}{2x - 9}$.

2° On définit une suite U par son premier terme U_0 et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9}$.

a) On suppose que $U_0 < 1$.

Démontrer par récurrence que pour tout n, $U_n < 1$.

Démontrer que la suite U est croissante.

En déduire qu'elle est convergente

b) On suppose que $1 < U_0 < 4$

Démontrer par récurrence que pour tout n,. $1 < U_n < 4$

Démontrer que la suite U est décroissante.

En déduire qu'elle est convergente

Cours : Une suite croissante et majorée converge

Une suite décroissante et minorée converge

$\boxed{1}$ 1° l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à – 1.

Première méthode. Le changement de repère.

Soit I (– 1 ,0) et $(I, \vec{i}, \vec{j})$ un nouveau repère. M(x, y) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et M(X, Y) dans le repère $(I; \vec{i}; \vec{j})$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases}$

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow Y = \sqrt{(X-1)^2 + 2(X-1) - 3} \Leftrightarrow Y = \sqrt{X^2 - 2X + 1 + 2X - 2 - 3}$

$\Leftrightarrow Y = \sqrt{X^2 - 4}$.

La fonction $X \longmapsto \sqrt{X^2 - 4}$ est paire donc la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées du nouveau repère comme axe de symétrie.

Deuxième méthode.

$\mathscr{C}$ symétrique par rapport à $\mathscr{D}$ si et seulement si pour tout réel h un réel tel que – 1 + h et – 1 – h soit dans $\mathscr{D}_f$ les points M(– 1 + h , f(– 1 + h)) et N (– 1 – h, f(– 1 – h)) sont symétriques par rapport à $\mathscr{D}$

c'est à dire f(– 1 + h) = f (– 1 – h).

$f(-1+h) = \sqrt{(-1-h)^2 + 2(-1-h) - 3} = \sqrt{1 + 2h + h^2 - 2 - 2h - 3} = \sqrt{h^2 - 4}$

$f(-1-h) = \sqrt{(-1+h)^2 + 2(-1+h) - 3} = \sqrt{1 - 2h + h^2 - 2 + 2h - 3} = \sqrt{h^2 - 4}$

Pour tout réel h de $]-\infty\ ; -2] \cup [2\ ; +\infty[$ on a : f(– 1 + h) = f(– 1 – h)

Donc $\mathscr{D}$ est bien axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

Remarque : La fonction g est un polynôme du second degrés. sa représentation graphique admet donc comme axe de symétrie la droite d'équation "$x = -\dfrac{b}{2a}$" c'est à dire la droite Δ.

Pour tout réel h, g(– 1 + h) = g(– 1 – h) donc pour tout réel $h \notin\ ]-2\ ; +2[$ on a : $\sqrt{g(-1+h)} = \sqrt{g(-1-h)}$.

On peut alors conclure

2° g est un polynôme du second degrés croissant sur $[1\ ; +\infty[$

x	1	+∞
g	0	↗

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\ ; +\infty[$

$f : x \longmapsto g(x) \longmapsto \sqrt{g(x)}$

Sur $[1\ ; +\infty[$ f est la composée d'une fonction croissante avec une fonction croissante elle est donc croissante.

3° $f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1}$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 3 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1} = \dfrac{x^2 + 2x - 3 - x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1} = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0$

Donc la droite d'équation "y = x + 1" est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Signe de $f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1) = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x + 1}$

On étudie donc f sur [1 ; + ∞ [

On a : $x + 1 > 0$ donc $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1) > 0$ donc $f(x) - (x+1) < 0$.

$\mathscr{C}_f$ est au dessous de Δ.

4° Soit x > 1.

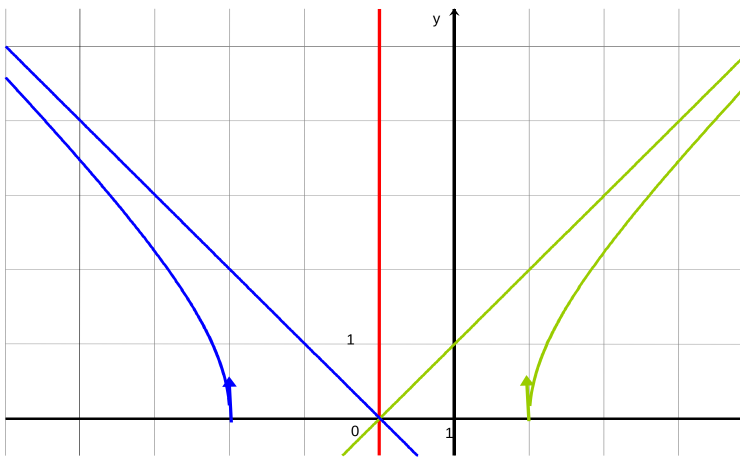
$\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 0}{x - 1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x - 1}$

$= \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}$ car x – 1 > 0

$X = \dfrac{x+3}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+3}{x-1} = +\infty$. On a donc :

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

f n'est pas dérivable en 1.



$\boxed{2}$ 1° $f'(x) = \dfrac{2x - 9 - (x-8)\times 2}{(2x-9)^2} = \dfrac{7}{(2x-9)^2}$

x	$-\infty$	$4{,}5$	$+\infty$
f'	$+$	$\|$	
f	$\nearrow$	$\|$	

2° $\mathscr{P}(n)$: $U_n < 1$.

Initialisation :

$U_0 < 1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité.

Si, pour un entier n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie

On a alors $U_n < 1$.

Comme f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 4{,}5[$ on peut dire que : $f(U_n) < f(1)$.

Comme on a : $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(1) = 1$ on peut dire que $U_{n+1} < 1$ c'est à dire que $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion .

$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{P}(0) \text{ vraie}\\ \mathscr{P}(n) \text{ vraie implique } \mathscr{P}(n+1) \text{ vraie}\end{array}\right\} \text{on a donc pour tout entier n } \mathscr{P}(n) \text{ vraie.}$$

Démontrons que U est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} - U_n = \frac{U_n - 8 - U_n(2U_n - 9)}{2U_n - 9} = \frac{U_n - 8 - 2U_n^2 + 9U_n}{2U_n - 9} = \frac{-2U_n^2 + 10U_n - 8}{2U_n - 9}$$

$$= \frac{(U_n - 1)(-2U_n + 8)}{2U_n - 9}$$

pour tout entier n on a :

$U_n < 1$ donc $-2U_n > -2$ donc $8 - 2U_n > 8 - 2 > 0$.

de plus $2U_n < 2$ donc $2U_n - 9 < 2 - 9 < 0$

$$\text{On a } \left.\begin{array}{c}U_n < 1\\ 8 - 2U_n > 0\\ 2U_n - 9 < 0\end{array}\right\} \text{ donc } U_{n+1} - U_n > 0.$$

La suite U est donc bien croissante.

La suite U est croissante majorée par 1 elle est donc convergente.

b) $\mathscr{P}(n)$: $1 < U_n < 4$

Initialisation.

$1 < U_0 < 4$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité.

Si pour un entier n $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $1 < U_n < 4$

Comme f est croissante on a alors : $f(1) < f(U_n) < f(4)$.

$$\left.\begin{array}{c}f(1) = 1\\ f(U_n) = U_{n+1}\\ f(4) = 4\end{array}\right\} \text{on a donc bien } 1 < U_{n+1} < 4 \text{ donc } \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion.

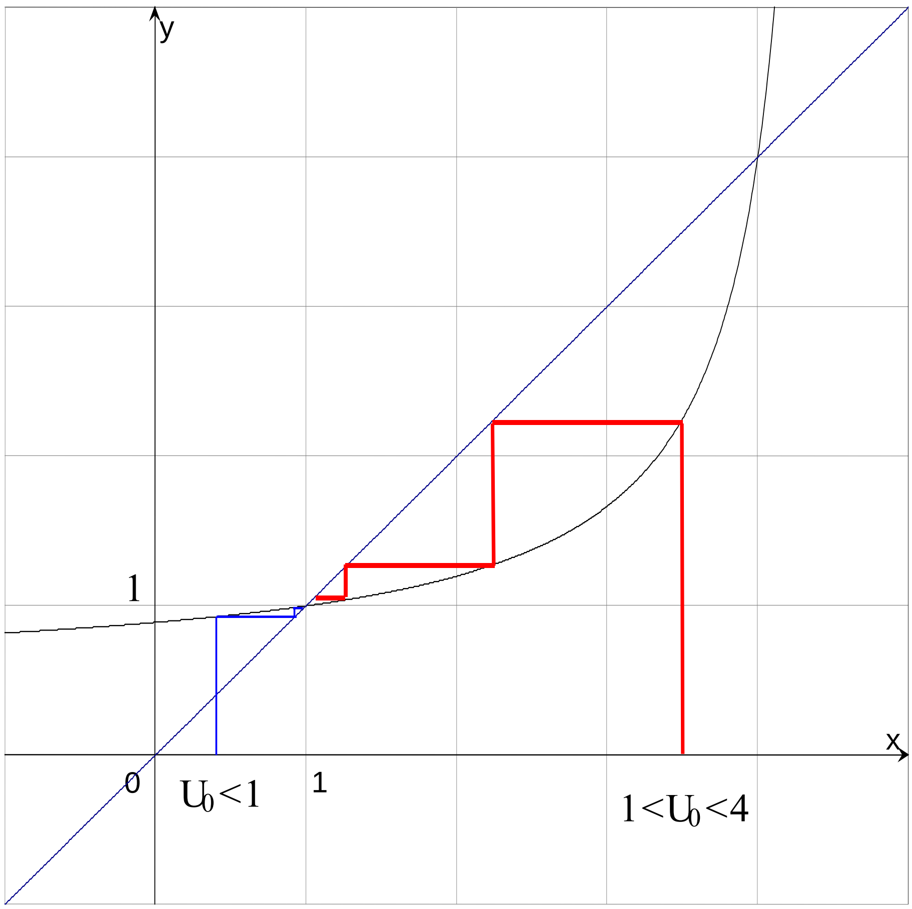
$$\left.\begin{array}{r}\mathscr{P}(0) \text{ vraie}\\ \mathscr{P}(n) \text{ vraie implique } \mathscr{P}(n+1) \text{ vraie}\end{array}\right\} \text{on a donc pour tout entier n } \mathscr{P}(n) \text{ vraie.}$$

On a vu que $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(-2U_n + 8)}{2U_n - 9}$

$$1 < U_n < 4 \text{ donc } \left.\begin{array}{c}U_n - 1 > 0\\ 8 - 2U_n > 8 - 2\times 4\\ 2U_n - 9 < 2\times 4 - 9 < 0\end{array}\right\} \text{donc } \frac{(U_n - 1)(-2U_n + 8)}{2U_n - 9} < 0 \text{ donc } U_{n+1} < U_n.$$

La suite U est donc décroissante.

U est décroissante minorée par 1 donc U est convergente.


y
x
1
0
1
U0<1
1<U0<4