Devoir maison n° 2 pour le 29/09/06

Exercice 1

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}$ $g(x) = x^2 + 2$.

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1° Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2° Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1° Montrer que f est dérivable sur D et étudier les variations de f sur D

2° Calculer $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathscr{C}$) ?

3° a) Montrer qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

pour tout réel x distinct de 1 : $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x - 1}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique (Δ) que l'on précisera.

Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ

4° Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 2$.

Montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe ($\mathscr{C}$) où la tangente est parallèle à D.

Préciser les coordonnées de A et B ainsi qu'une équation des tangentes Δ_1 et Δ_2 .

5° Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie de

6° Construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes et Δ_1 et Δ_2.

Exercice 1 Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}$ $g(x) = x^2 + 2$. Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1° Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} - (x^2 + 2) = \frac{\left(\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} - (x^2 + 2)\right)\left(\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + (x^2 + 2)\right)}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2}$$

$$= \frac{x^4 + 4x^2 + 3 - (x^2+2)^2}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2} = \frac{x^4 + 4x^2 + 3 - x^4 - 4x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2} = \frac{-7}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = 0$

2° Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Pour tout x de ℝ, $\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} > 0$ et $x^2 + 2 > 0$ donc $\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3} + x^2 + 2 > 0$ et donc $f(x) - g(x) > 0$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur D= ℝ–{1} par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. 1° Montrer que f est dérivable sur D et étudier les variations de f sur D

f est définie sur D et c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur D, elle est donc dérivable sur D

$$f'(x) = \frac{(2x - 7)(x - 1) - (x^2 - 7x + 10) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 7x + 7 - x^2 + 7x - 10}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Pour tout réel x de D, $(x - 1)^2 > 0$. Donc pour tout réel x de D f'(x) est du signe de $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

On a donc .

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
signe de f '		+	0	−	‖	−	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

f est donc croissante sur $]-\infty\ ; -1]$ et sur $[3\ , +\infty[$

f est donc décroissante sur $[-1\ ; 1[$ et sur $]1\ , 3]$

2° Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathscr{C}$) ?

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 7x + 10 = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

3° a) Montrer qu'il existe trois réels α, β et γ tels que : pour tout réel x distinct de 1 : $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x - 1}$

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} = \frac{\alpha x (x - 1) + \beta (x - 1) + \gamma}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} = \frac{\alpha x^2 - \alpha x + \beta x - \beta + \gamma}{x - 1}$$

Pour avoir cette égalité il suffit de prendre α, β et γ vérifiant : $\begin{cases} 1 = a \\ -7 = -\alpha + \beta \\ 10 = -\beta + \gamma \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -6 \\ \gamma = 4 \end{cases}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 6 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x - 6 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique (Δ) que l'on précisera. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ

Pour tout réel x de D on a : $f(x) = x - 6 + \dfrac{4}{x-1}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x-1}$

La droite d'équation y = x – 6 est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° Soit D la droite d'équation : y = – 3 x +2. Montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe ($\mathscr{C}$) où la tangente est parallèle à D. Préciser les coordonnées de A et B ainsi qu'une équation des tangentes Δ_1 et Δ_2 .

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite D si et seulement si elle a le même coefficient directeur que d c'est à dire que α est solution de l'équation f'(x) = – 3

Si x ≠ 1 on a : $f'(x) = \alpha \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3(x - 1)^2 \qquad (x \neq 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3x^2 + 6x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

f(0) = 2 donc A(0 , 2) et f(2) = 0 donc B(2 , 0)

5° Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de symétrie

Si la courbe $\mathscr{C}$ admet un centre de gravité ce ne peut être que le point d'intersection des asymptotes. ses coordonnées doivent donc vérifier : $\begin{cases} x = 1 \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$

Démontrons que I(1 , – 5) est centre de symétrie de la courbe.

1[ière] méthode. Changement de repère

Un point M (x,y) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ à pour coordonnées (X,Y) dans le repère $(I; \vec{i}; \vec{j})$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + X \\ y = -5 + Y \end{cases}$ On a alors :

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow -5 + Y = f(1 + X) \Leftrightarrow Y - 5 = 1 + X - 6 + \dfrac{4}{1 + X - 1} \Leftrightarrow Y = 5 + 1 - 6 + \dfrac{4}{X} \Leftrightarrow Y = X + \dfrac{4}{X}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(X) = X + \dfrac{4}{X}$. La fonction F est impaire.

La courbe $\mathscr{C}$, qui est la représentation graphique de la fonction impaire F dans le repère $(I; \vec{i}; \vec{j})$, admet donc le centre du nouveau repère comme centre de symétrie.

2[ième] méthode

Si I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ alors l'image par la symétrie de centre I de tout point de la courbe doit être un point de la courbe.

Soit h un réel différent de 1 et M(1 + h,f(1 + h)) un point de $\mathscr{C}$

6° Construire la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes et Δ_1 et Δ_2.