Devoir maison n° 2 A rendre le 7 novembre 2005

Exercice 1

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle [0, 1] par : $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$

1° Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2° a) Justifier que f_n est dérivable sur [0, 1[et montrer que $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

3° a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n.

b) Prouver que $a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives – 4 ; 3 et i.

On appelle f l'application du plan P privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -4$) associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = \dfrac{z-3}{z+4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application f.

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on notera C''.

3° Déterminer les affixes des points invariants par f (c'est-à-dire les points M vérifiant f(M) = M).

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de z'.

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

5° a) Montrer que pour tout complexe z différent de −4, $|z'-1| \times |z+4| = 7$

b) En déduire que si M décrit un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, alors son image M' par f appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle [0, 1] par : $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$

1° $f_n(0) = 0^n \sqrt{1-0} = 0$ et $f_n(1) = 1^n \sqrt{1-1} = 0$

2° a) Justifier que f_n est dérivable sur [0, 1[et montrer que $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$

La fonction : $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur [0 ; 1 [

la fonction : $x \longmapsto 1-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur] 0 ; + ∞ [

La fonction composée est donc dérivable en tout x tel que $1-x \in]0;+\infty[$, elle est donc dérivable sur [0 , 1 [

f est donc le produit de deux fonctions dérivables sur [0 , 1 [elle est donc dérivable sur [0 , 1 [

$f(x) = u \times v$ avec $u(x) = x^n$ donc $u' = n\,x^{n-1}$ et $v(x) = \sqrt{1-x}$ donc $v'(x) = \dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$$f'(x) = n\,x^{n-1} \times \sqrt{1-x} + x^n \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{n\,x^{n-1} \times \sqrt{1-x} \times 2\sqrt{1-x} - x^n}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2n\,x^{n-1}(1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}} =$$

$$\frac{x^{n-1}(2n(1-x)-x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$$

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1. $\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \dfrac{x^n\sqrt{1-x}-0}{x-1} = \dfrac{x^n(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} -x^n = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

La fonction n'est donc pas dérivable en 1 (Remarque : la formule précédente ne peut être utilisée)

Remarque : la fonction f est continue en 1 et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = -\infty$ la courbe représentative de f admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

Pour tout réel x de [0 , 1 [, x^n et $2\sqrt{1-x}$ sont positifs donc f '(x) est du signe de $2n-(2n+1)x$

$2n-(2n+1)x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2n}{2n+1}$ $(2n+1 > 0)$

Pour tout entier naturel n : $0 \le 2n < 2n+1$ donc $0 < \dfrac{2n}{2n+1} < 1$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
signe de f '	0	+	0	–	
f		↗		↘	

3° a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n.

D'après les variations de f_n on peut dire que f_n admet sur [0 , 1] un maximum $f\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) = a_n$

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{1-\frac{2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\frac{2n+1-2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

b) Prouver que $a_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ Pour tout entier naturel n, $0 \le \dfrac{2n}{2n+1} \le 1$ donc $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n \le 1^n$ donc $a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Pour tout entier naturel n, $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes (a_n) est converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives – 4 ; 3 et i.

On appelle f l'application du plan P privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -4$) associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = \dfrac{z-3}{z+4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application f.

$$\frac{i-3}{i+4} = \frac{(i-3)(4-i)}{1+16} = \frac{4i - i^2 - 12 + 3i}{17} = -\frac{11}{17} + \frac{7}{17}i$$

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on notera C".

$$z \neq -4 : \quad \frac{z-3}{z+4} = i \Leftrightarrow z - 3 = i(z+4) \Leftrightarrow z - iz = 3 + 4i \Leftrightarrow z(1-i) = 3 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{3+4i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(3+4i)(1+i)}{1+1} \Leftrightarrow z = \frac{3 + 3i + 4i + 4i^2}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

3° Déterminer les affixes des points invariants par f (c'est-à-dire les points M vérifiant f(M) = M).

$$z \neq -4 : \quad \frac{z-3}{z+4} = z \Leftrightarrow z - 3 = z(z+4) \Leftrightarrow z - 3 = z^2 + 4z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0 \text{ équation } \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} \Leftrightarrow \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z + \frac{3}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z + \frac{3}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de z'.

$$\left.\begin{array}{l} z_A = -4 \;\; z_M = z \text{ donc } AM = |z_M - z_A| = |z+4| \\ z_B = 3 \;\; z_M = z \text{ donc } AM = |z_M - z_B| = |z-3| \end{array}\right\} \text{ donc } |z'| = \left|\frac{z-3}{z+4}\right| = \frac{BM}{AM}$$

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

$M \neq A$: $M \in E \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}(O, 1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$. E est donc la médiatrice de [AB]

5° a) Montrer que pour tout complexe z différent de −4, $|z' - 1| \times |z + 4| = 7$

$$|z'-1| \times |z+4| = \left|\frac{z-3}{z+4} - 1\right| \times |z+4| = \left|\frac{z-3-z-4}{z+4}\right| \times |z+4| = \left|\frac{-7}{z-+4}\right| \times |z+4| = 7$$

b) En déduire que si M décrit un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, alors son image M' par f appartient à un cercle $\mathscr{C}$ ' dont on précisera le centre et le rayon.

<u>$r > 0$.</u> $M \in \mathscr{C}(A,r) \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow |z+4| = r$. Remarque : on a alors $M \neq A$)

On sait que : $|z'-1| \times |z+4| = 7$ on peut donc dire que : $|z+4| = \dfrac{7}{|z'-1|}$ (remarque : $z' \neq 1$)

On a donc : $M \in \mathscr{C}(A,r) \Leftrightarrow \dfrac{7}{|z'-1|} = r \Leftrightarrow |z'-1| = \dfrac{7}{r} \Leftrightarrow m' \in \mathscr{C}\left(I, \dfrac{7}{r}\right)$ où I est le point d'affixe 1.

Figure