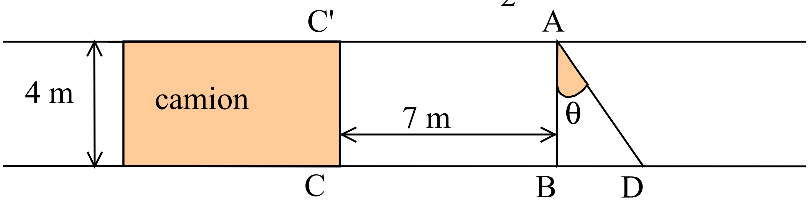
Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . .30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3° Conclure.

Rappel :

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $[0\,,\frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On note Z_M l'affixe du point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4 i.

1° Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant

$$(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et $r = 3$

3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

b) On pose : $Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$.

Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

c) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.

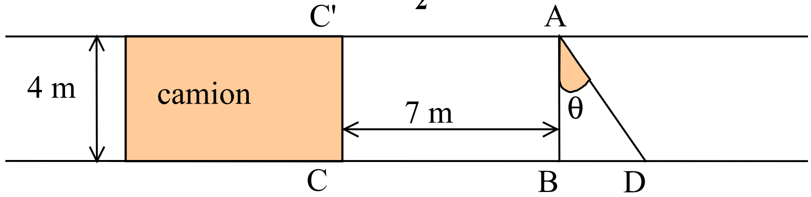
d) Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?

r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

Nouvelle-Calédonie novembre 2005

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à .30 km/h ! L'avant du camion est représenté par le segment [CC '] sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

Dans le triangle ABD rectangle en B on a : $\cos\theta = \frac{AB}{AD}$ donc $AD = \frac{AB}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{BD}{AB}$ donc $BD = AB \times \tan\theta = 4\tan\theta$ donc $CD = 7 + 4\tan\theta$

Si d_1 est la distance CD et Km et t_1 le temps en heures. $v_1 = \frac{d_1}{t_1} = 60$ Km h^{-1} et $d_1 = \frac{0{,}004}{\cos\theta}$

Si d_2 est la distance AD et Km et t_1 le temps en heures. $v_2 = \frac{d_2}{t_2} = 30$ K h^{-1} et $d_2 = 0{,}007 + 0{,}004\tan\theta$

On a donc $t_1 = \dfrac{\frac{0{,}004}{\cos\theta}}{60} = \dfrac{0{,}004}{30\cos\theta}$

et $t_2 = \dfrac{0{,}007 + 0{,}004\tan\theta}{60}$

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $t_1 < t_2$

$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \dfrac{0{,}004}{30\cos\theta} < \dfrac{0{,}007 + 0{,}004\tan\theta}{60} \Leftrightarrow \dfrac{8}{\cos\theta} - (7 + 4\tan\theta) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{\cos\theta} - \dfrac{7}{2} - 2\tan\theta < 0 \Leftrightarrow f(\theta) > 0$

3° Conclure. ***Rappel*** **:**

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(\theta) = 4 \times \dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{2}{\cos^2\theta} = \dfrac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$f'(x)$ est du signe de $2 - 4\sin\theta$.

$2 - 4\sin\theta \ge 0 \Leftrightarrow \sin\theta \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta \le \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta \le \frac{\pi}{6}$ car la fonction sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(\theta) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7}{2} + \dfrac{2 \times \frac{1}{2} - 4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{7}{2} - 2\sqrt{3} \approx 0{,}036.$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
signe de f '		+	0	−	
f	$-\frac{1}{2}$	↗	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	↘	$-\infty$

le lapin a une chance !

La calculatrice donne les solutions approchées de l'équation $f(\theta) = 0$:

$\alpha \approx 0{,}39$ et $\beta \approx 0{,}64$

les variations de f donnent : $f(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \,]\alpha, \beta[$

$\alpha \approx 22{,}6$ degré et $\beta \approx 36{,}9$ degrés.

Le lapin pour échapper au camion doit partir avec un angle compris entre 23° et 36° environ

France septembre 1999.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe du point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4 i. 1° Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{2}$.

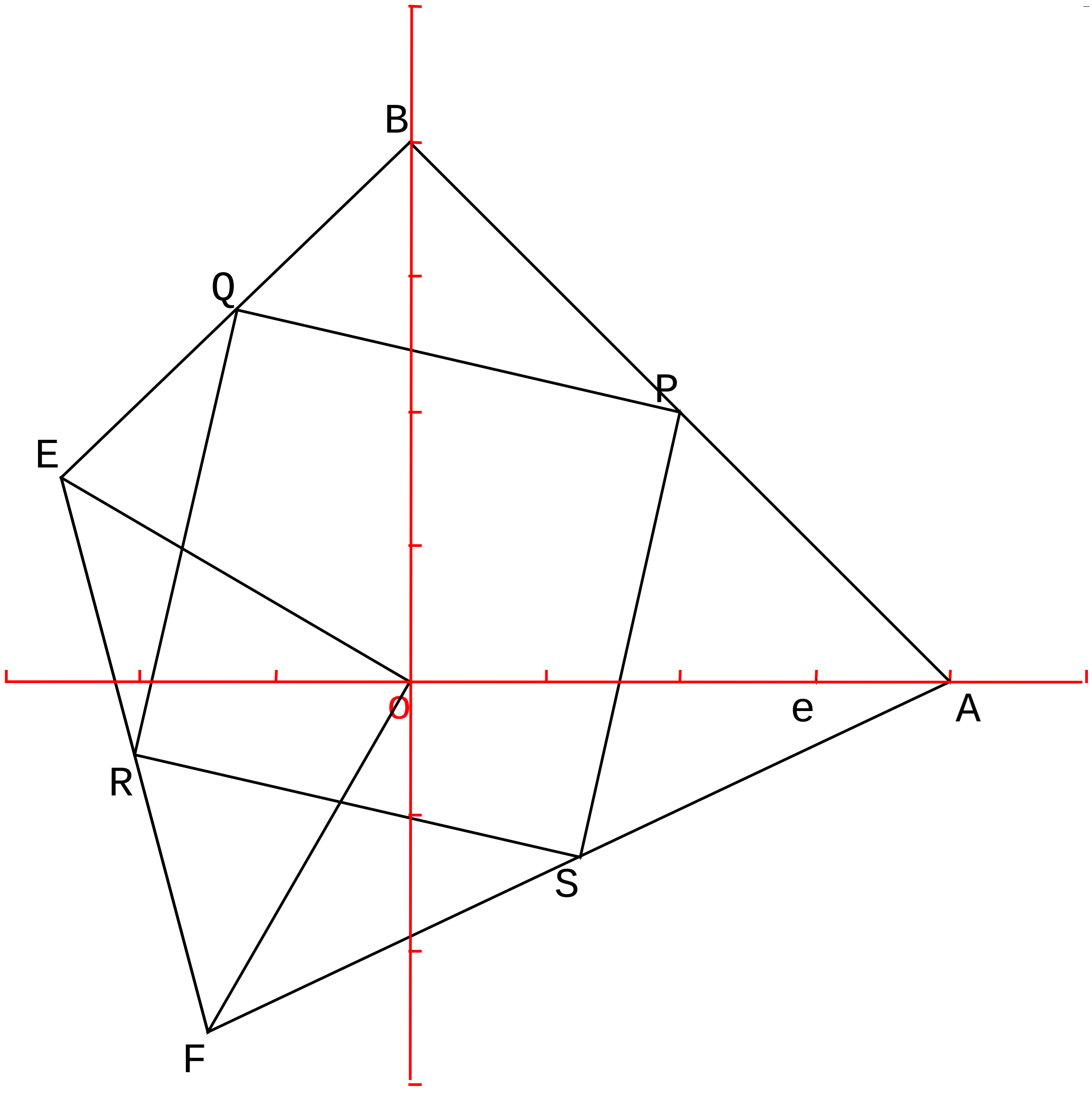
Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?

F est l'image de E par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'angle θ est : $z' - z_\Omega = e^{i\theta}\ (z - z_\Omega)$.

On a donc : $x_F - 0 = e^{i\pi/2}\ (z_E - 0) \Leftrightarrow z_E = i\ z_E = r\ i\ e^{i\theta}$

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et r = 3



3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

$p = \frac{a+b}{2}$ et $q = \frac{b+e}{2}$ donc l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ est égal à : $q - p = \frac{b+e}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{e-a}{2}$

$r = \frac{e+f}{2}$ et $s = \frac{f+a}{2}$ donc l'affixe de $\overrightarrow{SR}$ est égal à : $r - s = \frac{e+f}{2} - \frac{f+a}{2} = \frac{e-a}{2}$.

$q - p = r - s$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

Remarque : On peut démontrer ce résultat en classe de troisième ou de seconde..

Dans le triangle ABE : $\left.\begin{array}{l}\text{P est le milieu de [AB]}\\ \text{Q est le milieu de [BE]}\end{array}\right\}$ donc (PQ) // (AE) et $PQ = \dfrac{AE}{2}$. On a $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

De même dans le triangle EFA $\left.\begin{array}{l}\text{R est le milieu de [EF]}\\ \text{S est le milieu de [AF]}\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{RS} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}$.

Ce théorème s'appelle le théorème de varignon.

b) On pose : $Z = \dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$. Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

$z_P = \dfrac{4+4\,i}{2} = 2 + 2\,i$; $z_Q = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2}$; $z_R = \dfrac{r\,e^{i\theta} + i\,r\,e^{i\theta}}{2}$

$$\left.\begin{array}{r}z_R - z_Q = \dfrac{r\,e^{i\theta} + i\,r\,e^{i\theta}}{2} - \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} = \dfrac{i\,r\,e^{i\theta} - 4\,i}{2}\\ z_Q - z_P = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} - \dfrac{4+4\,i}{2} = \dfrac{r\,e^{i\theta} - 4}{2}\end{array}\right\}\text{ donc } \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} = \frac{i\,r\,e^{i\theta} - 4\,i}{r\,e^{i\theta} - 4} = i.$$

$\left|\dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{QR}{PQ} = 1$ et $(\overrightarrow{PQ}\,,\overrightarrow{QR}) = \dfrac{\pi}{2}$

donc PQ = QR et (PQ) $\perp$ (QR)

le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un losange. Il a, en plus, un angle droit c'est donc un carré

c) Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.

$z_P = \dfrac{4+4\,i}{2}$ et $z_Q = \dfrac{4\,i + r\,e^{i\theta}}{2} = \dfrac{r\cos\theta}{2} + i\,\dfrac{r\sin\theta + 4}{2}$

d) Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ? r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

$$PQ = \left|\frac{r\cos\theta}{2} + i\,\frac{r\sin\theta + 4}{2} - \frac{4+4\,i}{2}\right| = \left|\frac{r\cos\theta - 4}{2} + i\,\frac{r\sin\theta}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{r\cos\theta - 4}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sin\theta}{2}\right)^2}$$

$$\mathscr{A} = PQ^2 = \frac{r^2\cos^2\theta - 8\,r\cos\theta + 16}{4} + \frac{r^2\sin^2\theta}{4} = \frac{r^2 - 8\,r\cos\theta + 16}{4}$$

Soi f la fonction définie sur [0 , 2 π [par $f(\theta) = \dfrac{r^2 - 8\,r\cos\theta + 16}{4}$. On a $f'(\theta) = 8\,r\sin\theta$.

$f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \pi$. f est maximale pour $\theta = \pi$ et on a alors $\mathscr{A} = \dfrac{-r^2 + 8\,r + 16}{4}$ et $z_E = -r$.