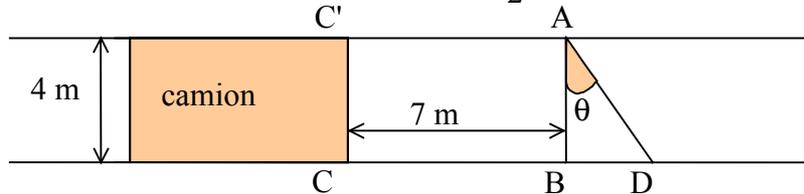


Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3° Conclure.

Rappel :

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm).

On note Z_M l'affixe du point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe $4i$.

1° Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant

$$(\overline{OE}, \overline{OF}) = \frac{\pi}{2}.$$

Quelle est, en fonction de r et θ , l'affixe de F ?

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et $r = 3$

3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BE]$, $[EF]$, $[FA]$.

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

b) On pose : $Z = \frac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.

Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

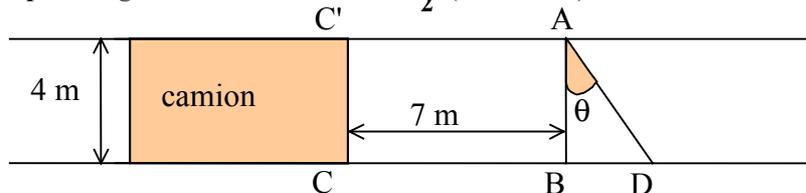
c) Calculer, en fonction de r et θ , les affixes respectives des points P et Q.

d) Quelle est, en fonction de r et θ , l'aire du carré PQRS ?

r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à 30 km/h ! L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



1° Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

Dans le triangle ABD rectangle en B on a : $\cos \theta = \frac{AB}{AD}$ donc $AD = \frac{AB}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta}$

$\tan \theta = \frac{BD}{AB}$ donc $BD = AB \times \tan \theta = 4 \tan \theta$ donc $CD = 7 + 4 \tan \theta$

Si d_1 est la distance CD et Km et t_1 le temps en heures. $v_1 = \frac{d_1}{t_1} = 60 \text{ Km h}^{-1}$ et $d_1 = \frac{0,004}{\cos \theta}$

Si d_2 est la distance AD et Km et t_2 le temps en heures. $v_2 = \frac{d_2}{t_2} = 30 \text{ K h}^{-1}$ et $d_2 = 0,007 + 0,004 \tan \theta$

On a donc $t_1 = \frac{0,004}{60} = \frac{0,004}{30 \cos \theta}$

et $t_2 = \frac{0,007 + 0,004 \tan \theta}{60}$

2° On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $t_1 < t_2$

$t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{0,004}{30 \cos \theta} < \frac{0,007 + 0,004 \tan \theta}{60} \Leftrightarrow \frac{8}{\cos \theta} - (7 + 4 \tan \theta) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\cos \theta} - \frac{7}{2} - 2 \tan \theta < 0 \Leftrightarrow f(\theta) > 0$

3° Conclure. Rappel :

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et a pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

$f'(\theta) = 4 \times \frac{-\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\cos^2 \theta} = \frac{2 - 4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$

$f'(x)$ est du signe de $2 - 4 \sin \theta$.

$2 - 4 \sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin \theta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \theta \leq \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\pi}{6}$ car la fonction sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$f(\theta) = \frac{7}{2} + \frac{2 \sin \theta - 4}{\cos \theta}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(\theta) = -\infty$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + \frac{2 \times \frac{1}{2} - 4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{2} - 2\sqrt{3} \approx 0,036$.

le lapin a une chance !

La calculatrice donne les solutions approchées de l'équation $f(\theta) = 0$:

$\alpha \approx 0,39$ et $\beta \approx 0,64$

les variations de f donnent : $f(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in] \alpha , \beta [$

$\alpha \approx 22,6$ degré et $\beta \approx 36,9$ degrés.

Le lapin pour échapper au camion doit partir avec un angle compris entre 23° et 36° environ

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
signe de f'		+	0	-
f	$-\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$-\infty$	

France septembre 1999.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe du point M. Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe $4i$. 1° Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$ et r un réel strictement positif.

On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $(\vec{OE}, \vec{OF}) = \frac{\pi}{2}$.

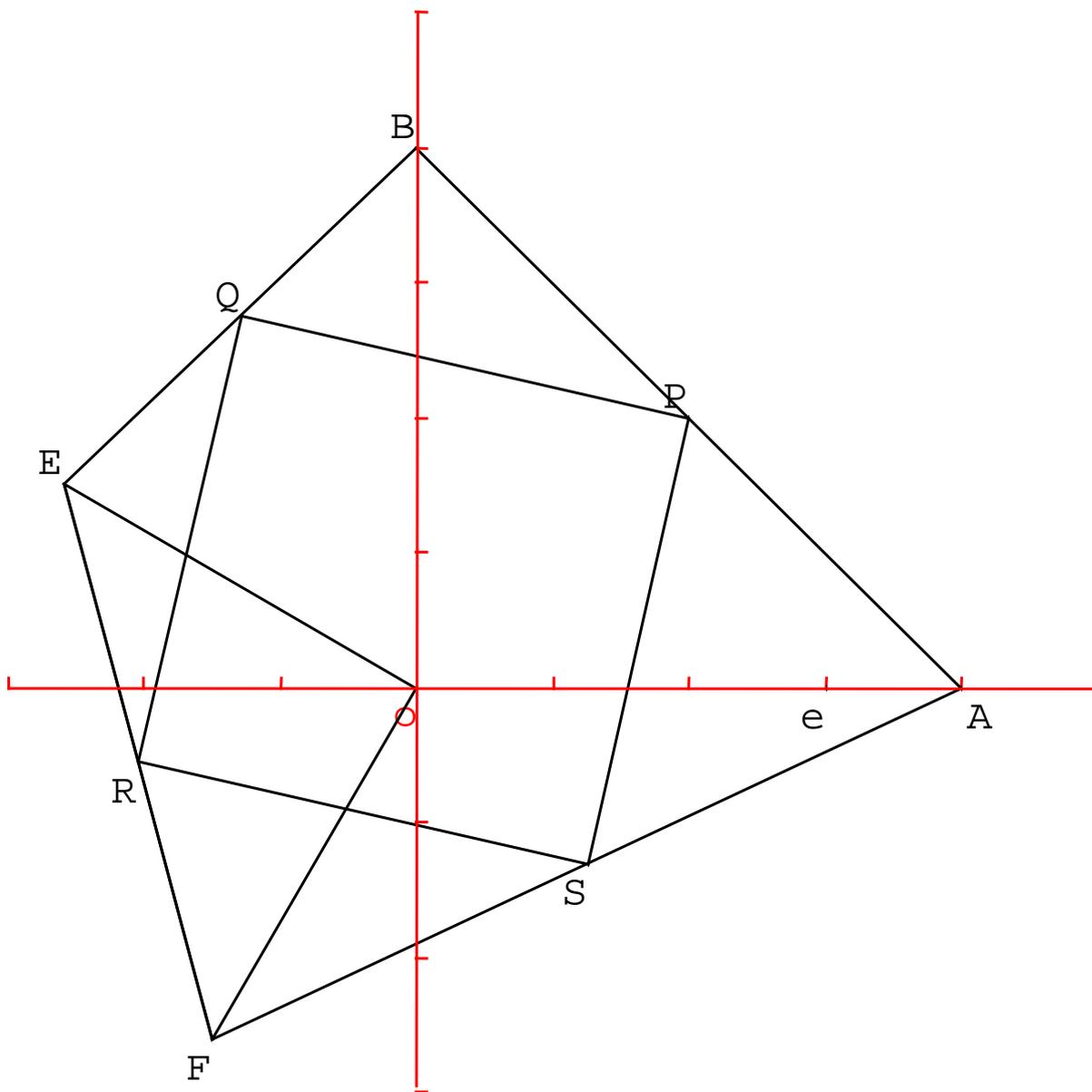
Quelle est, en fonction de r et θ , l'affixe de F ?

F est l'image de E par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On sait que l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'angle θ est : $z' - z_\Omega = e^{i\theta} (z - z_\Omega)$.

On a donc : $x_F - 0 = e^{i\pi/2} (z_E - 0) \Leftrightarrow z_E = i z_F = r i e^{i\theta}$

2° Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et $r = 3$



3° On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a) Prouver que PQRS est un parallélogramme

$$p = \frac{a+b}{2} \text{ et } q = \frac{b+e}{2} \text{ donc l'affixe de } \overrightarrow{PQ} \text{ est égal à : } q - p = \frac{b+e}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{e-a}{2}$$

$$r = \frac{e+f}{2} \text{ et } s = \frac{f+a}{2} \text{ donc l'affixe de } \overrightarrow{SR} \text{ est égal à : } r - s = \frac{e+f}{2} - \frac{f+a}{2} = \frac{e-a}{2}$$

$q - p = r - s$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc PQRS est un parallélogramme.

Remarque : On peut démontrer ce résultat en classe de troisième ou de seconde..

Dans le triangle ABE : $\left. \begin{array}{l} P \text{ est le milieu de } [AB] \\ Q \text{ est le milieu de } [BE] \end{array} \right\}$ donc $(PQ) \parallel (AE)$ et $PQ = \frac{AE}{2}$. On a $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$

De même dans le triangle EFA $\left. \begin{array}{l} R \text{ est le milieu de } [EF] \\ S \text{ est le milieu de } [AF] \end{array} \right\}$ donc $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$.

Ce théorème s'appelle le théorème de Varignon.

b) On pose : $Z = \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}$. Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

$$z_P = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i; z_Q = \frac{4i + r e^{i\theta}}{2}; z_R = \frac{r e^{i\theta} + i r e^{i\theta}}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_R - z_Q = \frac{r e^{i\theta} + i r e^{i\theta}}{2} - \frac{4i + r e^{i\theta}}{2} = \frac{i r e^{i\theta} - 4i}{2} \\ z_Q - z_P = \frac{4i + r e^{i\theta}}{2} - \frac{4 + 4i}{2} = \frac{r e^{i\theta} - 4}{2} \end{array} \right\} \text{ donc } \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} = \frac{i r e^{i\theta} - 4i}{r e^{i\theta} - 4} = i.$$

$$\left| \frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z_R - z_Q}{z_Q - z_P}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \frac{QR}{PQ} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}) = \frac{\pi}{2}$$

donc $PQ = QR$ et $(PQ) \perp (QR)$

le parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un losange. Il a, en plus, un angle droit c'est donc un carré

c) Calculer, en fonction de r et θ , les affixes respectives des points P et Q.

$$z_P = \frac{4 + 4i}{2} \text{ et } z_Q = \frac{4i + r e^{i\theta}}{2} = \frac{r \cos \theta}{2} + i \frac{r \sin \theta + 4}{2}$$

d) Quelle est, en fonction de r et θ , l'aire du carré PQRS ? r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

$$PQ = \left| \frac{r \cos \theta}{2} + i \frac{r \sin \theta + 4}{2} - \frac{4 + 4i}{2} \right| = \left| \frac{r \cos \theta - 4}{2} + i \frac{r \sin \theta}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{r \cos \theta - 4}{2}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \theta}{2}\right)^2}$$

$$\mathcal{A} = PQ^2 = \frac{r^2 \cos^2 \theta - 8r \cos \theta + 16}{4} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{4} = \frac{r^2 - 8r \cos \theta + 16}{4}$$

Soi f la fonction définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(\theta) = \frac{r^2 - 8r \cos \theta + 16}{4}$. On a $f'(\theta) = 8r \sin \theta$.

$f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \pi$. f est maximale pour $\theta = \pi$ et on a alors $\mathcal{A} = \frac{-r^2 + 8r + 16}{4}$ et $z_E = -r$.