T S_7 2 h **Devoir surveillé n°1** Mercredi 28 septembre 2005

$\boxed{1}$ On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 3 ; U_{n+1} = \dfrac{2}{1 + U_n}$

1° Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq 3$

2° On considère la suite (V_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

3° Exprimer V_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (V_n).

4° En déduire la limite de la suite (U_n).

$\boxed{2}$ Soit a un réel strictement positif.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + n a$.

$\boxed{3}$ Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement)

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 2}$ | b) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 4}{1 - x^2}$ | c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ | d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x + 1}{x - 1}$

$\boxed{4}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1° Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3° Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 2$.

a) Démontrer que $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$. (Hors barème)

$\boxed{5}$ Soit la fonction f définie sur $[\,0 ; 1\,[\cup]\,1 ; +\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{-x + \sqrt{x}}{x - 1}$

1° Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ?

2° Peut-on prolonger par continuité la fonction f en $x_0 = 1$?

$\boxed{6}$ Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 3\,[\cup]\,3 ; +\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 9x^2 + 26}{(x - 3)^2}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1° Calculer la limite de f en 3.

2° a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = a x + b + \dfrac{c}{(x - 3)^2}$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ a une asymptote dont on donnera une équation.

c) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation " $y = 2x + 3$"

$\boxed{1}$ On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 3$; $U_{n+1} = \dfrac{2}{1 + U_n}$

1° On note $\mathscr{P}(n)$: $0 \leq U_n \leq 3$

Initialisation :

$U_0 = 3$ donc $0 \leq U_0 \leq 3$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité :

Si pour un entier n la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée on a alors :

$0 \leq U_n \leq 3$ donc $1 + 0 \leq 1 + U_n \leq 1 + 3$

La fonction :$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on peut donc dire que :

$\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1 + U_n} \leq 1$ donc $2 \times \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1 + U_n} \leq 2 \times 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1 + U_n} \leq 2 \leq 3$.

La propriété $\mathscr{P}(n + 1)$ est donc bien vérifiée.

Conclusion : $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée.

2° $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{2}{1 + U_n} - 1}{\dfrac{2}{1 + U_n} + 2} = \dfrac{2 - 1 - U_n}{1 + U_n} \times \dfrac{1 + U_n}{2 + 2 + 2\,U_n} = \dfrac{1 - U_n}{4 + 2\,U_n} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

(V_n) est un suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

3° On a donc pour tout entier n : $V_n = V_0 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$V_0 = \dfrac{U_0 - 1}{U_0 + 2} = \dfrac{3 - 1}{3 + 2} = \dfrac{2}{5}$ et $V_n = \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

4° $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$ donc $V_n(U_n + 2) = U_n - 1$ donc $V_n\,U_n + 2\,V_n = U_n - 1$ donc $U_n\,V_n - U_n = -2\,V_n - 1$

donc $U_n\,(V_n - 1) = -2\,V_n - 1$ donc $U_n = \dfrac{2\,V_n + 1}{1 - V_n}$ (pour tout entier n $V_n \neq 1$)

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{2 \times 0 + 1}{1 - 0} = 1$.

$\boxed{2}$ On note $\mathscr{P}(n)$: $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$.

Initialisation.

$\left.\begin{matrix}(1 + a)^0 = 1 \\ 1 + 0 \times a = 1\end{matrix}\right\}$ donc $(1 + a)^0 = 1 + 0 \times a$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

Hérédité.

Si pour un entier n la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée On a : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$.

$a > 0$ donc $1 + a > 0$.

On a donc : $(1 + a) \times (1 + a)^n \geq (1 + a) \times (1 + n\,a)$ donc $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a + n\,a^2 \geq 1 + a\,(n + 1)$

car $n\,a^2 \geq 0$. On peut donc dire la ^propriété $\mathscr{P}(n + 1)$ est vérifiée.

$\boxed{3}$ a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-4}{1-x^2}$:   Signe de $1-x^2$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} x-4 = 1-4 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 1-x^2 = 0^- \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-4}{1-x^2} = +\infty .$$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ et $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$ donc $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x-3}{x-1}$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{2-3}{2-1} = -1.$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x+1}{x-1}$

pour tout réel x : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1+1 \leq \sin x+1 \leq 1+1$ donc $\dfrac{0}{x} \leq \dfrac{\sin x+1}{x-1} \leq \dfrac{2}{x}$ $(x > 0)$

On a donc pour tout réel x : $0 \leq \dfrac{\sin x+1}{x-1} \leq \dfrac{2}{x}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ donc en appliquant la théorème des gendarmes on peut dire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x+1}{x-1}$

$\boxed{4}$ 1° Etude du signe de $x^2 - 4x + 8$. On a $\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 < 0$ donc pour tout réel x, $x^2 - 4x + 8 \geq 0$.

La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2° On pose $X = x^2 - 4x + 8$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 8 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 8 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = +\infty$$

3° $f(x) - (x - 2) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} - (x - 2) = \dfrac{(\sqrt{x^2 - 4x + 8} - (x - 2))(\sqrt{x^2 - 4x + 8} + (x - 2))}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + (x - 2)}$

$= \dfrac{x^2 - 4x + 8 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + (x - 2)} = \dfrac{x^2 - 4x + 8 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2} = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2 = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2} = 0.$$

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$ donc la courbe représentative de f admet la droite d'équation "$y = x - 2$" comme asymptote en $+\infty$.

b) On doit étudier le signe de $f(x) - (x - 2) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2}$

1[ier] cas : $x - 2 \geq 0$.

On a alors $\sqrt{x^2 - 4x + 8} + (x - 2) \geq 0$ (somme de deux nombres positifs) donc $\dfrac{4}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} + x - 2} \geq 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$

2[ième] cas $x - 2 \leq 0$

on a alors $-(x - 2) \geq 0$ donc $\sqrt{x^2 - 4x + 8} - (x - 2) \geq 0$ (somme de deux nombres positifs)

donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$

$\boxed{5}$ 1° $f(x) = \dfrac{x\left(-1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}}$ on a : $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\dfrac{1}{\sqrt{x}} = -1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}} = -1.$

la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation "y = – 1" comme asymptote.

2° $\lim\limits_{x\to1} -x+\sqrt{x} = -1+\sqrt{1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$ On a donc une forme indéterminée.

$$\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{(-x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{-x^2+x}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = -\frac{x}{(x+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to1} -\frac{x}{(x+\sqrt{x})} = -\frac{1}{1+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

Variante. On pose $X = \sqrt{x}$

$$\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \frac{-X^2+X}{X^2-1} = \frac{-X(X-1)}{(X+1)(X-1)} = -\frac{X}{X+1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x} = 1\\ \lim\limits_{X\to1} -\dfrac{X}{X+1} = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to1}\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{X\to1} -\frac{X}{X+1} = -\frac{1}{2}$$

on peut donc prolonger la fonction f par continue en posant $f(1) = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{6}$ 1° $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to3} 2x^3-9x^2+26 = -1\\ \lim\limits_{x\to3}(x-3)^2 = 0^+\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$.

2° a) pour tout réel $x \neq 3$

$$\frac{2x^3-9x^2+26}{(x-3)^2} = ax+b+\frac{c}{(x-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-9x^2+26}{(x-3)^2} = \frac{ax(x^2-6x+9)+b(x^2-6x+9)+c}{(x-3)^2}$$

$\Leftrightarrow 2x^3-9x^2+26 = ax^3-6ax^2+9ax+bx^2-6bx+9b+c$

$\Leftrightarrow 2x^3-9x^2+26 = ax^3+(-6a+b)x^2+(9a-6b)x+9b+c$

par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 2\\ -6a+b = -9\\ 9a-6b = 0\\ 9b+c = 26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\\ b = 3\\ c = -1\end{cases} \quad \text{On a donc : } f(x) = 2x+3-\frac{1}{(x-3)^2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{(x-3)^2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

La droite d'équation "y = 2 x + 3" est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) $f(x)-(2x+3) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} \leq 0.$