## Exercice 1

Soit la suite $(U_n)$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 1}{3 - U_n}$

(On admet qu'on peut ainsi définir une suite c'est à dire que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 3$)

1° Calculer les valeurs exactes de $U_1$, $U_2$, $U_3$, ***puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée décimale à $10^{-5}$ près du terme de rang 50.***

2° On pose, pour tout entier naturel n, $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ et on admet que $V_n$ est définie pour tout entier naturel n.

(c'est à dire que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 1$)

a) Montrer que la suite $(V_n)$ est arithmétique et préciser sa raison.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{n}{n+2}$

3° Quel est le sens de variation de la suite $(U_n)$ ?

La suite $(U_n)$ a-t-elle une limite ?

## Exercice 2

Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n + 1$.

## Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

Soit ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

***1° Calculer f '(x)'***

***2° Etudier le signe de f '(x) sur $\mathbb{R} - \{ 1 \}$***

3° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

***4° Dresser le tableau de variations de f***

5° Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{ 1 \}$,on ait: $f(x) = a x + b + \dfrac{c}{x - 1}$

6° Montrer que ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

7° Déterminer la position relative de ($\mathscr{C}$) et de son asymptote oblique.

***8° Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un centre de symétrie.***

## Exercice 4

On considère la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - x$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1° Calculer la limite de f en $+\infty$ .

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?

2° Calculer la limite de f en $-\infty$ .

Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -2x$.

Exercice 5

On considère une fonction f définie sur [ – 2 , 2 ] par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 6x + 3} & \text{si } x \in [-2, -1[ \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{si } x \in [-1, 0[ \\ f(x) = \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

On a représenté ci-contre la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ et

la courbe représentative de la fonction f.

**.Partie A : Lecture graphique**

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Cochez chaque case : « vrai » si vous pensez que l'affirmation est exacte ; « faux » si vous pensez que cette affirmation est inexacte. Aucune case cochée correspond à une absence de réponse.

Une réponse exacte rapporte un certain nombre de points ;une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de ce nombre de points ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1° La fonction f est

| | |
|---|---|
| continue en – 1 VRAI FAUX | dérivable en – 1 VRAI FAUX |

2° La fonction f est

| | |
|---|---|
| continue en 0 VRAI FAUX | dérivable en 0 VRAI FAUX |

3° La fonction f est

| | |
|---|---|
| continue en 1 VRAI FAUX | dérivable en 1 VRAI FAUX |

4° La fonction f est

| | | |
|---|---|---|
| croissante sur [ – 2 , 2 ]<br>VRAI FAUX | décroissante sur [ – 2 , 2 ]<br>VRAI FAUX | On ne peut pas dire si la fonction f est croissante ou décroissante sur [ – 2 , 2 ]<br>VRAI FAUX |

5° la représentation graphique de f

| | | |
|---|---|---|
| admet un asymptote<br>VRAI FAUX | admet plusieurs asymptotes<br>VRAI FAUX | n'admet pas d'asymptote<br>VRAI FAUX |

**Partie B Calcul de limites**

1° Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin\sqrt{x}}$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f.

2° Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$ .

On rappelle que:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

**Exercice 1** **Soit la suite $(U_n)$ définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{3 - U_n}$ (On admet qu'on peut ainsi définir une suite c'est à dire que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 3$) 1° Calculer les valeurs exactes de $U_1$, $U_2$, $U_3$,** ***puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée décimale à $10^{-5}$ près du terme de rang 50.***

$$U_1 = \frac{0+1}{3-0} = \frac{1}{3} \quad U_2 = \frac{\frac{1}{3}+1}{3-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad U_3 = \frac{\frac{1}{2}+1}{3-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad U_{50} \approx 0{,}96154$$

**2° On pose, pour tout entier naturel n, $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ et on admet que $V_n$ est définie pour tout entier naturel n. (c'est à dire que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 1$) a) Montrer que la suite $(V_n)$ est arithmétique et préciser sa raison.**

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{1}{\frac{U_n + 1}{3 - U_n} - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{1}{\frac{U_n + 1 - 3 + U_n}{3 - U_n}} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{3 - U_n}{2\,U_n - 2} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{3 - U_n - 2}{2\,(U_n - 1)}$$

$= \frac{1 - U_n}{2\,(U_n - 1)} = -\frac{1}{2}$ la suite $(V_n)$ est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$

**b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n = \frac{n}{n+2}$**

1iere méthode

$$V_n = V_0 - \frac{n}{2} = -1 - \frac{n}{2} = -\frac{2+n}{2}$$

$$\frac{1}{U_n - 1} = -\frac{2+n}{2} \Leftrightarrow U_n - 1 = -\frac{2}{n+2} \Leftrightarrow U_n = 1 - \frac{2}{n+2} \Leftrightarrow U_n = \frac{n+2-2}{n+2} \Leftrightarrow U_n = \frac{n}{n+2}$$

2ième méthode. par récurrence

Initialisation

$U_0 = 0$ et $\frac{0}{0+2} = 0$. La propriété est vraie au rang 0

Hérédité

Considérons un entier k tels que $U_k = \frac{k}{k+2}$, démontrons que $U_{k+1} = \frac{k+1}{k+1+2}$

$$U_{k+1} = \frac{U_k + 1}{3 - U_k} = \frac{\frac{k}{k+2} + 1}{3 - \frac{k}{k+2}} = \frac{\frac{k+k+2}{k+2}}{\frac{3k+6-k}{k+2}} = \frac{2k+2}{k+2} \times \frac{k+2}{2k+6} = \frac{k+1}{k+3}$$

Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

**3° Quel est le sens de variation de la suite $(U_n)$ ? La suite $(U_n)$ a-t-elle une limite ?**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - x \times 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

Pour tout entier naturel n, $n < n + 1$ donc $f(n) < f(n + 1)$ donc $U_n < U_{n+1}$

La suite $(U_n)$ est donc croissante

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ donc la suite $(U_n)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

---

**Exercice 2** **Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n + 1$.**

Initialisation

$2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $2^0 \leq 0 + 1$ La propriété est vraie au rang 0

Hérédité

Considérons un entier k tel que $2^k \geq k + 2$ , démontrons que $2^{k+1} \geq k + 1 + 2$.

$2^k \geq k + 2$ donc $2 \times 2^k \geq 2\,(k + 2)$ donc $2^{k+1} \geq 2\,k + 2 \geq k + 2$.

On a donc bien : $2^{k+1} \geq k + 2$.

Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

**Exercice 3** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. Soit ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. 1° Calculer f '(x)'

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = x^2 - 3x + 6 \ \text{ et } u'(x) = 2x - 3 \\ v(x) = x - 1 \ \text{ et } v'(x) = 1 \end{array}\right\} \text{donc } f'(x) = \frac{(2x-3)\times(x-1) - (x^2 - 3x + 6)\times 1}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

**2° Etudier le signe de f '(x) sur $\mathbb{R} - \{1\}$**

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 2x + 3$ | | + | 0 | − | \|\| | − | 0 | + | |
| f'(x) | | + | 0 | − | \|\| | − | 0 | + | |

**3° Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 3x + 6 = 1 - 3 + 6 = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} x - 1 = 0^- \text{ donc } \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de f ' | | + | 0 | − | \|\| | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

**4° Dresser le tableau de variations de f**

**5° Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$,on ait: $f(x) = a x + b + \dfrac{c}{x - 1}$**

$$\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = a x + b + \frac{c}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = \frac{a x^2 - a x + b x - b + c}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = \frac{a x^2 + (b - a) x - b + c}{x - 1}$$

Pour avoir l'égalité pour tout réel x différent de 1 il suffit de choisir a, b et c tel que : $\begin{cases} 1 = a \\ -3 = b - a \\ 6 = -b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

**6° Montrer que ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.**

$$f(x) = (x - 2) + \frac{4}{x - 1} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - (x - 2) = 0$$

Donc $\Delta$ la droite d'équation $y = x - 2$. est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

**7° Déterminer la position relative de ($\mathscr{C}$) et de son asymptote oblique.**

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) - (x - 2)$ | − | \|\| | + |
| | ($\mathscr{C}$) est au dessous de $\Delta$ | | ($\mathscr{C}$) est au dessus de $\Delta$ |

***8° Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un centre de symétrie.***

$\mathscr{C}$ a deux asymptotes., les droites d'équation $y = x - 2$ et $x = 1$.

Si il y a un centre de symétrie c'est le point d'intersection de ces deux asymptotes.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad I\,(1\,, -1)$$

On fait un changement de repère . Soit $(I, \vec{i}, \vec{j})$ le nouveau repère

M(x,y) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et M(X,Y) dans $(I; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \text{ donc } \begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

$$M \in (\mathscr{C}) \text{ équation } y = f(x) \Leftrightarrow Y - 1 = f(X + 1) \Leftrightarrow Y - 1 = X + 1 - 2 + \frac{4}{X + 1 - 1} \Leftrightarrow Y = \frac{4}{X}$$

La fonction $X \longmapsto \dfrac{4}{X}$ est impaire donc sa repère graphique dans $(I; \vec{i}; \vec{j})$ admet l'origine du repère I comme centre de symétrie

**Exercice 4** **On considère la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+2} - x$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. 1° Calculer la limite de f en $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?**

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2+2} - x)(\sqrt{x^2+2} + x)}{\sqrt{x^2+2} + x} = \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2} + x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2} + x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} + x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

la droite d'équation y = 0 est asymptote à ( $\mathscr{C}$ )

**2° Calculer la limite de f en $-\infty$ . Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet en $-\infty$ une asymptote d'équation y = – 2 x.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} - x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} - x = +\infty$ .

$$f(x) - (-2x) = \sqrt{x^2+2} - x + 2x = \sqrt{x^2+2} + x = \frac{(\sqrt{x^2+2} - x)(\sqrt{x^2+2} + x)}{\sqrt{x^2+2} - x} = \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2} - x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2} - x}$$

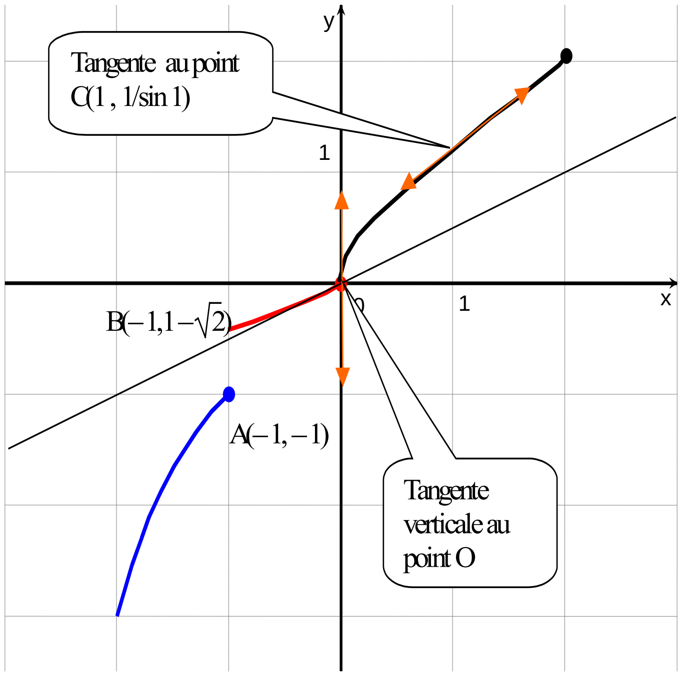
---

**Exercice 5** **On considère une fonction f définie sur [ – 2 , 2 ]**

**par :**
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2+6x+3} & \text{si } x \in [-2, -1[ \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \in [-1, 0[ \\ f(x) = \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

**On a représenté ci-contre la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ et la courbe représentative de la fonction f.**

**.Partie A : Lecture graphique Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Cochez chaque case : « vrai » si vous pensez que l'affirmation est exacte ; « faux » si vous pensez que cette affirmation est inexacte. Aucune case cochée correspond à une absence de réponse. Une réponse exacte rapporte un certain nombre de points ;une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de ce nombre de points ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.**




**1° La fonction f est**

## Voir la figure "dynamique" : [http://sylbermath.free.fr/sylbermathlycee/geog/ds1,0607.html](http://sylbermath.free.fr/sylbermathlycee/geog/ds1,0607.html)

La courbe est "coupée " et passe du point A(– 1, – 1) au point B(– 1,1 – $\sqrt{2}$)

Si la fonction n'est pas continue en – 1 alors elle n'est pas dérivable en – 1.

| | |
|---|---|
| **continue en – 1** $\boxed{\text{FAUX}}$ | **dérivable en – 1** $\boxed{\text{FAUX}}$ |

**2° La fonction f est**

La courbe n'est pas "coupée" en O. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. la fonction est donc continue en 0.

Elle admet une tangente verticale en O. la fonction n'est pas dérivable en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \pm\infty$

| | |
|---|---|
| **continue en 0** $\boxed{\text{VRAI}}$ | **dérivable en 0** $\boxed{\text{FAUX}}$ |

**3° La fonction f est**

la courbe n'est pas "coupée" en C(1, 1/sin 1) et admet une tangente non verticale la fonction est donc dérivable et continue en 1.

| | |
|---|---|
| **continue en 1** $\boxed{\text{VRAI}}$ | **dérivable en 1** $\boxed{\text{VRAI}}$ |

4° La fonction f est

| | | |
|---|---|---|
| **croissante sur [ – 2 , 2 ]** $\boxed{\text{VRAI}}$ | **décroissante sur [ – 2 , 2 ]** $\boxed{\text{FAUX}}$ | **On ne peut pas dire si la fonction f est croissante ou décroissante sur [ – 2 , 2 ]** $\boxed{\text{FAUX}}$ |

**5° la représentation graphique de f**

| | | |
|---|---|---|
| **admet un asymptote** FAUX | **admet plusieurs asymptotes** FAUX | **n'admet pas d'asymptote** VRAI |

**Partie B Calcul de limites1° Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin\sqrt{x}}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f.**

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{0+1}+1} = 0$$

$$X = \sqrt{x} \text{ et } \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{X \to 0} \frac{X^2}{\sin X} = \lim_{X \to 0} X \times \frac{1}{\frac{\sin X}{X}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

La fonction f admet une limite en 0 et f est continue en 0.

**2° Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f.**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+1}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x-1}{x+3}.$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-1-1}{-1+3} = -1.$$

f n'admet pas de limite en – 1 et f n'est pas continue en – 1 .