T S_7 2 h **Devoir surveillé n°2** Jeudi 20 octobre 2005

5 points

Exercice 1 1° Restitution organisée de connaissance.

Soit θ et θ' deux réel. soit z le complexe de module 1 d'argument θ et z ' le complexe de module 1 d'argument θ'

a) Donner les formes trigonométriques de z et z '.

b) Démontrer que $\frac{z}{z'}$ a pour module 1 et pour argument $\theta - \theta'$.

2° Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Soit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Ecrire z_3 sous forme algébrique

c) Déterminer le module et un argument de z_3. En déduire la forme trigonométrique de z_3.

d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 Soit A le point d'affixe – 1 et B le point d'affixe – 2 i. 4 points

A tout point M distinct de A et d'affixe z différent de – 1 on associe le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \frac{z + 2i}{z + 1}$.

1° Calculer l'affixe du point C ' associé au point d'affixe 1 + i.

2° Déterminer l'affixe z de M sachant que Z = i.

3° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $|Z| = 1$.

4° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}'$ des points M tels que $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité graphique 4 cm)

1° Etude de f en $+\infty$: Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

7 points

2° Etude locale de f en 1.

a) Démontrer que la fonction f est continue en 1.

b) Démontrer que, f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

c) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3° Etude locale de f en 0.

a) La fonction f est-elle continue en 0 ?

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

c) Que peut-on dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

4° Etude des variations de f. Démontrer que, pour tout réel $x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2\sqrt{x}(x - 1)^2}$.

En déduire les variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$

5° En faisant apparaître les résultats trouvés dans les question précédentes, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 4 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x + \sin^2 x$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Unité graphique : 1 cm en abscisse et 4cm en ordonnée.

1° Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$. 4 points

2° Démontrer que pour tout réel x de $[0, \pi]$: $f'(x) = 2\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

3° Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi ; 2\pi]$

Exercice 1 **1° Restitution organisée de connaissance. Soit θ et θ' deux réel. soit z le complexe de module 1 d'argument θ et z ' le complexe de module 1 d'argument θ'**

a) Donner les formes trigonométriques de z et z'.

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$

b) Démontrer que $\frac{z}{z'}$ a pour module 1 et pour argument θ – θ'.

$$\frac{z}{z'} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{s\cos\theta' + i\sin\theta'} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' - i\sin\theta')}{(\cos\theta' + i\sin\theta')(\cos\theta' - i\sin\theta')} =$$

$$\frac{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta')}{\cos^2\theta' + \sin^2\theta'}$$

2° Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \text{donc } \theta = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \text{donc } \theta = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

b) Soit $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Ecrire z_3 sous forme algébrique

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{1+1} = \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

c) Déterminer le module et un argument de z_3. En déduire la forme trigonométrique de z_3.

$$|z_3| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg z_3 = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} \qquad [2\pi]$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

$$z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Il y a unicité de la forme algébrique donc :

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ 8 points

Soit A le point d'affixe – 1 et B le point d'affixe – 2 i.
A tout point M distinct de A et d'affixe z différent de – 1 on associe le point M' d'affixe Z définie par :

$$\mathbf{Z = \frac{z + 2\,i}{z + 1}.}$$

1° Calculer l'affixe du point C ' associé au point d'affixe 1 + i.

$Z = \frac{1 + i + 2\,i}{1 + i + 1} = \frac{1 + 3\,i}{2 + i} = \frac{(1 + 3\,i)\,(2 - i)}{4 + 1} = \frac{2 - i + 6\,i + 3}{5} = \frac{5 + 5\,i}{5} = 1 + i$

2° Déterminer l'affixe z de M sachant que Z = i.

$Z = i \Leftrightarrow \frac{z + 2\,i}{z + 1} = i \Leftrightarrow z + 2\,i = i\,z + i \Leftrightarrow z\,(1 - i) = i - 2\,i \Leftrightarrow z = \frac{-\,i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{-\,i\,(1 + i)}{1 + 1} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

3° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que | Z | = 1.

$z \neq 1.\ |\,Z\,| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z + 2\,i}{z + 1}\right| = 1 \Leftrightarrow |\,z + 2\,i\,| = |\,z + 1\,|$

Géométriquement : z + 2 i est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ et z + 1 celui du vecteur $\overrightarrow{AM}$
$|\,z + 2\,i\,| = |\,z + 1\,| \Leftrightarrow BM = AM$. L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].
Analytiquement : $|\,z + 2\,i\,| = |\,z + 1\,| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4\,y + 4 = x^2 + 2\,x + 1 + y^2$
$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

4° Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que $Z \in \mathbb{R}$.
Géométriquement : z + 2 i est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ et z + 1 celui du vecteur $\overrightarrow{AM}$
Si $z \neq 1$ et $z \neq -\,2\,i$ on a :
$Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires si et seulement si M appartient à (AB).
Si $z = 2\,i$ on a bien $Z \in \mathbb{R}$. L'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A.

Analytiquement : $Z = \frac{x + i\,y + 2\,i}{x + i\,y + 1} = \frac{(x + i\,y + 2\,i)\,(x - i\,y + 1)}{(x + i\,y + 1)\,(x - i\,y + 1)} = \frac{x^2 - i\,x\,y + x + i\,x\,y + y^2 + i\,y + 2\,i\,x + 2\,y + 2\,i}{(x + 1)^2 + y^2}$

$= \frac{x^2 + y^2 + x + 2\,y}{(x + 1)^2 + y^2} + i\,\frac{y + 2\,x + 2}{(x + 1)^2 + y^2}$

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y + 2\,x + 2}{(x + 1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y + 2\,x + 2 = 0$ et $z \neq -\,1$

l'ensemble cherché est la droite d'équation $y = -\,2\,x - 2$ privée du point A.
(remarque A appartient à la droite d'équation $y = -\,2\,x - 2$)

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ **Soit la fonction f définie sur [0 ; + ∞ [par :** $\begin{cases} \mathbf{f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}} \text{ si } \mathbf{x \neq 1} \\ \mathbf{f(1) = \dfrac{1}{2}} \end{cases}$

Et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1° Etude de f en + ∞ : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{1-0}{1-0} = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

La droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$

2° Etude locale de f en 1. **a) Démontrer que la fonction f est continue en 1.**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ donc } \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = f(1)$$

b) Démontrer que, f est dérivable en 1 et calculer f '(1).

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}}{x-1} = \frac{2-1-\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})(x-1)} = \frac{1-\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})(x-1)} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2(1+\sqrt{x})^2(x-1)} = \frac{1-x}{2(1+\sqrt{x})^2(x-1)}$$

$$= -\frac{1}{2(1+\sqrt{x})^2} \quad \text{donc } \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2(1+1)^2} = -\frac{1}{8} \quad \text{f est donc dérivable en 1 et } f'(1) = -\frac{1}{8}$$

c) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{8}$$

3° Etude locale de f en 0. **a) La fonction f est-elle continue en 0 ?**

les fonctions u: $x \longmapsto \sqrt{x}-1$ et v : $x \longmapsto x-1$ sont continues sur [0 ; + ∞ [donc en 0 et la fonction v ne s'annule pas en 0 donc la fonction $\dfrac{u}{v}$ est continue en 0. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 = f(0)$..

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 1}{x-0} = \frac{\sqrt{x}-1-x+1}{(x-1)\,x} = \frac{\sqrt{x}-x}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x(x-1)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1 \text{ et } \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty \quad \text{La fonction f n'est pas dérivable en 0}$$

c) Que peut-on dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

Comme f est continue en 0 et que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ on peut dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

4° Etude des variations de f.

Démontrer que, pour tout réel x ∈] 0 ; 1 [∪] 1 ; + ∞ [, $\mathbf{f'(x) = -\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)^2}}$

$$\left.\begin{aligned} u(x) = \sqrt{x}-1 \text{ et } u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v(x) = x-1 \text{ et } v'(x) = 1 \end{aligned}\right\} \; f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x-1) - (\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1+2\sqrt{x}-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)^2}.$$

En déduire les variations de la fonction f sur [0 ; + ∞ [

Pour tout réel x de]0;1[∪]1; +∞ [, $f'(x) = -\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)^2} \leq 0$ et $f'(1) \leq 0$ donc f est décroissante sur [0; + ∞ [

5° En faisant apparaître les résultats trouvés dans les question précédentes, représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) unité graphique 4 cm.

Exercice 4 8 points

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x + \sin^2 x$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 2cm)

1° Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0 , \pi]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \sin^2(x + 2\pi) = \cos x + \sin^2 x = f(x)$

f est périodique de période 2π donc on peut étudier f sur un intervalle de longueur 2π par exemple sur $[-\pi , \pi]$ et en déduire l'étude de f sur $\mathbb{R}$ en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{i}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + (-\sin x)^2 = \cos x + \sin^2 x = f(x=$

f est paire donc on peut donc étudier f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ et en déduire l'étude de f sur $[-\pi ; \pi]$ en utilisant la symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées. .

2° Démontrer que pour tout réel x de $[0 , \pi]$: $f'(x) = 2\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

f est de la forme $u + v^2$ avec $\begin{cases} u(x) = \cos x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = -\cos x \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$

$f'(x) = u'(x) + 2v(x)v'(x) = -\sin x + 2\sin x \times \sin' x = -\sin x + 2\sin x\cos x = 2\sin x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

3° Etudier les variations de f sur $[0 , \pi]$

Sur $[0 ; \pi]$ la fonction sin est positive.

Sur $[0 ; \pi]$ la fonction cos est décroissante. $\cos x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \le \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \ge \frac{\pi}{3}$

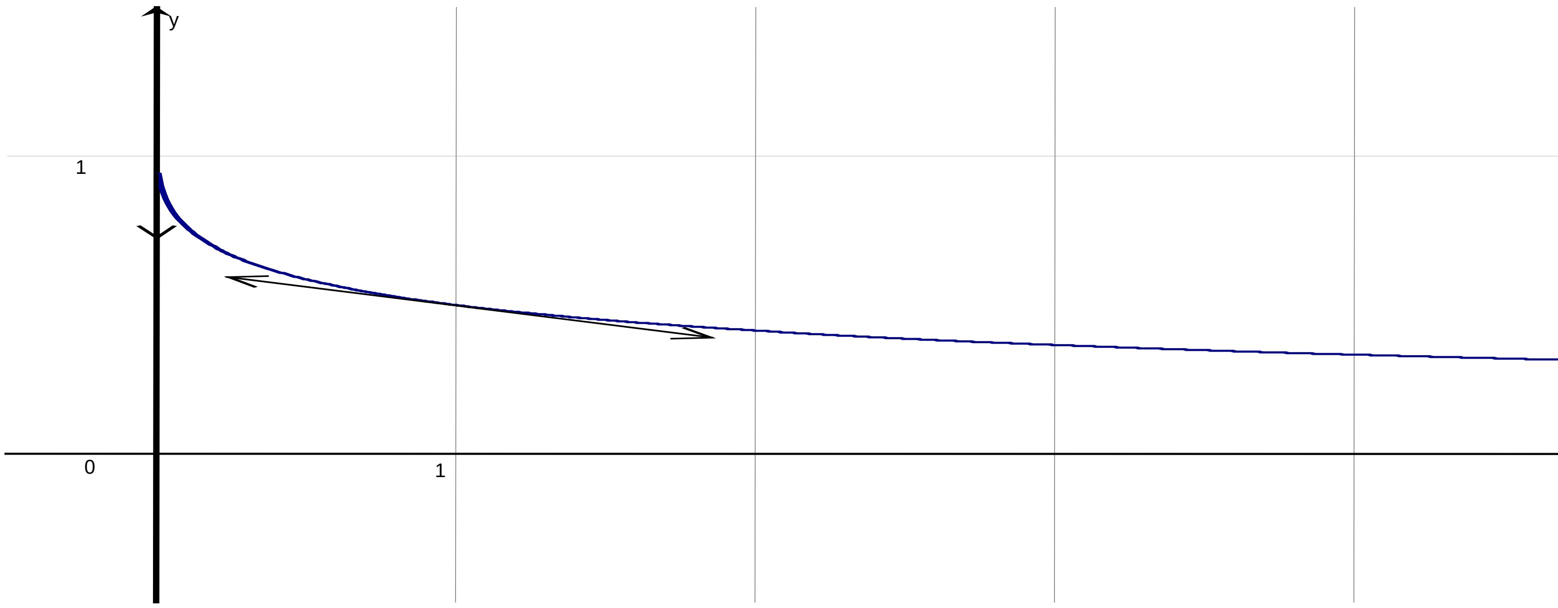
$f(0) = 1 + 0^2 = 1$

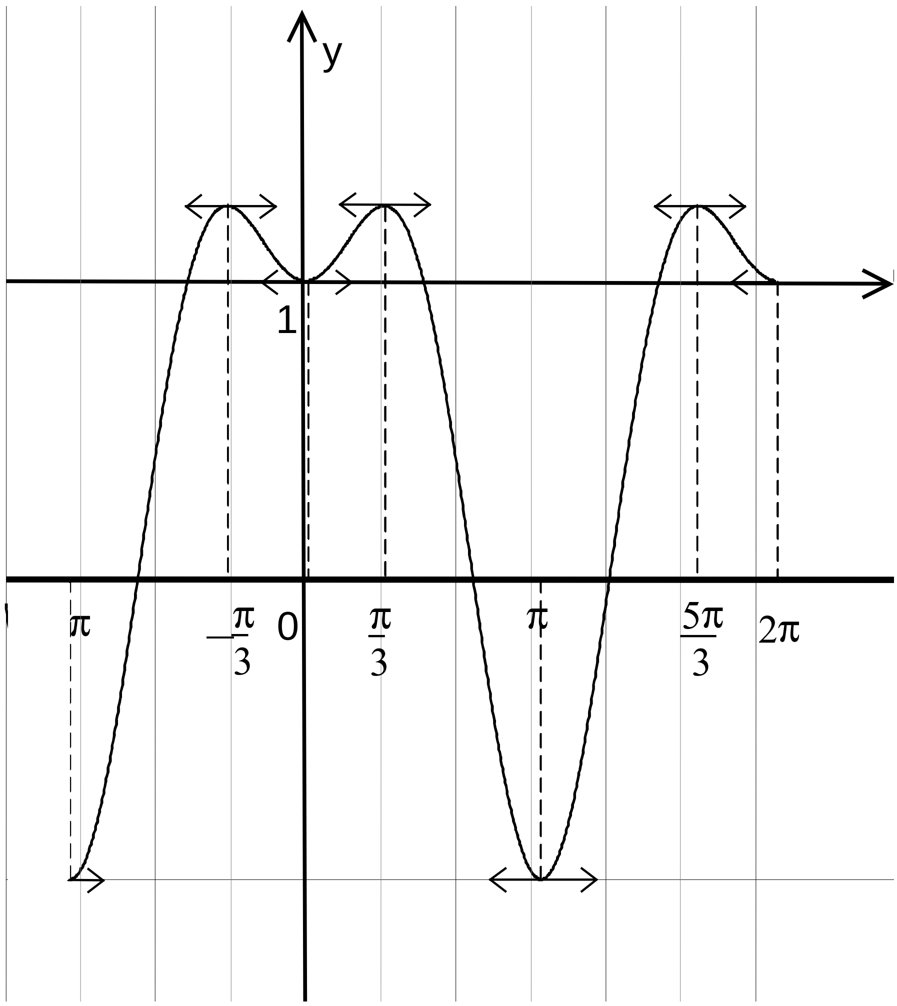
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

$f(\pi) = \cos\pi + \sin^2\pi = -1$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
sin x'	0	+		+	0
$\cos x - \frac{1}{2}$		+	0	–	
f '(x)	0	+	0	–	0
f	1	↗		↘	– 1

4° Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi ; 3\pi]$


y
1
0
1


y
1
π
$-\frac{\pi}{3}$
0
$\frac{\pi}{3}$
π
$\frac{5\pi}{3}$
2π