Exercice Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 3 + 2 i.
On appelle f la fonction qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1}$$

1° Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f.
Placer les points A, O', B' et B dans le plan.
2° a) Calculer, pour tout nombre complexe z différent de 1, le produit $(z' - 1)(z - 1)$.
b) En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a : $\begin{cases} AM \times AM' = 2 \\ \text{et } (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3° Démontrer que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle $\mathcal{C}'$. En préciser le centre et le rayon. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
4° a) Déterminer l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$.
b) Démontrer que si M est un point autre que A de la demi-droite $\mathcal{D}$ d'origine A passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

Problème. Soit m un réel. On considère la fonction f_m, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \dfrac{e^x + m}{(e^x + 1)^2}$

Partie A : Etude des fonctions f_m
1° a) Préciser si la fonction f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que, pour $m \geq \frac{1}{2}$, la fonction f_m est strictement monotone,
Montrer que, pour $m < \frac{1}{2}$, la fonction f_m présente un maximum dont vous donnerez la valeur en fonction de m.
c) Etudier les limites de f_m aux bornes de $\mathbb{R}$ et dresser, dans les deux cas $m \geq \frac{1}{2}$, puis $m < \frac{1}{2}$, le tableau de variations de f_m.
2° a) Montrez que, si m_1 est strictement inférieur à m_2, on a pour tout x réel

$$f_{m1}(x) < f_{m2}(x)$$

b) On désigne par C_m, la courbe représentative de f_m, dans un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On suppose que $m_1 < m_2$. Etudier alors la position de $\mathcal{C}_{m1}$ par rapport à $\mathcal{C}_{m2}$

Partie B Dans cet question $m < \frac{1}{2}$

1° Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{2(e^x + 1)}$
a) Etudier les variations de la fonction h.
b) Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$ et établir le tableau de variations de h
2° Soit A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ correspondant au maximum de la fonction f_n
Démontrer que pour tout réel m le point A_n appartient à la courbe $\mathcal{C}$

Partie C
1° Etude de f_0
a) Montrez que $\mathcal{C}_0$ admet (y' y) pour axe de symétrie.
b) donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_0$ au point d'abscisse 0.
2° Etude de f_1
a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet le point $\Omega(0\,;\frac{1}{2})$ comme centre de symétrie
b) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 0
3° Sur le graphique ci-joint on a tracé $\mathcal{C}_m$ pour $m = -1$ et pour $m = 2$
a) Reconnaître $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{-1}$
b) En utilisant les questions précédentes tracer sur le même graphique $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$.

Nom