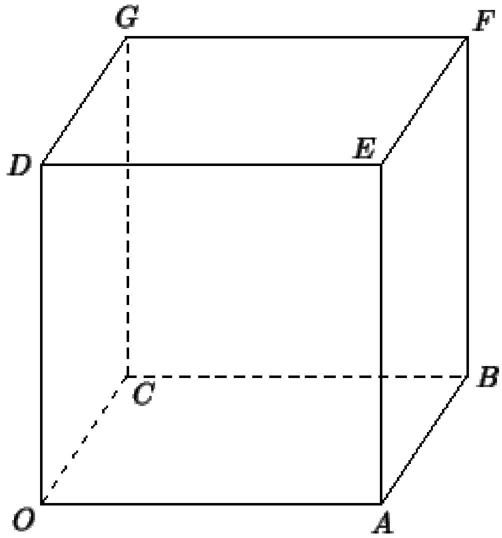
$\boxed{\text{Exercice 2}}$ 8 points



Soit le cube OABCDEFG représenté sur la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OD})$.
On désigne par α un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définis par :
$\overrightarrow{OL} = \alpha\, \overrightarrow{OC}$ $\quad \overrightarrow{OM} = \alpha\, \overrightarrow{OA}$ $\quad \overrightarrow{BK} = \alpha\, \overrightarrow{BF}$
1° a) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (DML)
2° On note Hle projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DML).
a) Démontrer que : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$
b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH} = \lambda\, \overrightarrow{OK}$
Démontrer que : $\lambda = \dfrac{a}{a^2 + 2}$
En déduire que H appartient au segment [OK].
c) Déterminer les coordonnées de H.
d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que : $HK = \dfrac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$
3° A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de α..

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ 8 points

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1 + n + t}\, dt$
1° a) Déterminer le sens de variations de cette suite.
b) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite positive.
c) Montrer que pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1 + n + t} \leq \dfrac{1}{1 + n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n + 1}$.
Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(In)_{n \in \mathbb{N}}$?
2° On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par :
$f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.
a) Etudier le sens de variations et le signe de f .
b) En déduire le sens de variations de g sur [0 ; 1].
c) Etablir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$
d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].
e) Etablir l'encadrement : $\dfrac{2}{3\,(n + 2)} \leq I_n \leq \dfrac{23}{30\,(n + 1)}$
f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$.

A rendre avec la copie Nom ______________________________

Exercice 1 — 4 points

1 Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

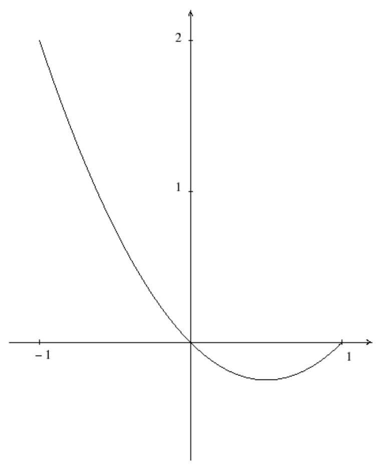
La fonction f", dérivée seconde de la fonction f sur ℝ, est définie par :

$f''(x) = \int_0^x -2\,t\,e^{-t^2}\,dt$.	oui	non
$f''(x) = \int_0^x -2\,x\,e^{-x^2}\,dt$.	oui	non
$f''(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$	oui	non
$f''(x) = e^{-x^2}$	oui	non

2 Soit *g* une fonction définie et dérivable, de dérivée *g*' continue sur [−1, 1].

La courbe représentative de *g* est donnée ci-contre.

Les affirmations suivantes sont-elles **cohérentes** avec le schéma :



$\int_0^1 g'(x)\,dx = 0$	oui	non
$\int_0^1 g(x)\,dx > -\frac{1}{2}$	oui	non
$\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 0$	oui	non
$\int_{-1}^1 g'(x)\,dx < 0$	oui	non

3 Soit f une fonction continue, croissante et positive sur ℝ

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

La suite (U_n) est bornée.	oui	non
Pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \le U_n \le f(n)$	oui	non
La suite (U_n) est décroissante.	oui	non
La suite (U_n) converge	oui	non

4 1° Pour calculer $\int_1^\alpha x \ln x\,dx$ on effectue une intégration par partie on obtient.

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}$	oui	non
$\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4}$	oui	non

2° $\int_0^\pi x \sin x\,dx$ est égal à

0	oui	non
π	oui	non

Exercice 1 **4 points** **1** **Soit la fonction f définie sur R par** $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

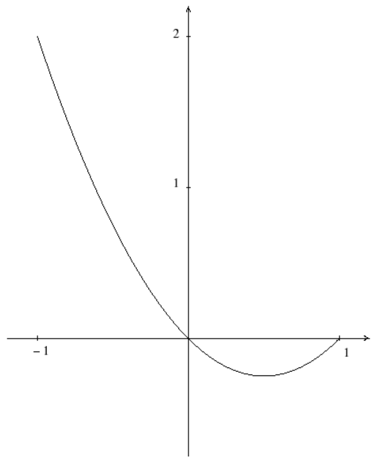
La fonction f '', dérivée seconde de la fonction f sur ℝ, est définie par :

$f''(x) = \int_0^x -2\,t\,e^{-t^2}\,dt$.	oui	**non**
$f''(x) = \int_0^x -2\,x\,e^{-x^2}\,dt$.	oui	**non**
$f''(x) = -2\,x\,e^{-x2}$	**oui**	non
$f''(x) = e^{-x2}$	oui	**non**

$f'(x) = e^{-x2}$
$f''(x) = -2\,x\,e^{-x2}$

2 Soit *g* une fonction définie et dérivable, de dérivée *g'* continue sur [−1, 1].
La courbe représentative de *g* est donnée ci-contre.
Les affirmations suivantes sont-elles **cohérentes** avec le schéma :

$\int_0^1 g'(x)\,dx = 0$	**oui**	non
$\int_0^1 g(x)\,dx > -\frac{1}{2}$	**oui**	non
$\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 0$	oui	**non**
$\int_{-1}^1 g'(x)\,dx < 0$	**oui**	non



3 Soit f une fonction continue, croissante et positive sur ℝ
On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

La suite (U_n) est bornée.	oui	**non**
Pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \le U_n \le f(n)$	oui	**non**
La suite (U_n) est décroissante.	oui	**non**
La suite (U_n) converge	oui	**non**

4 1° Pour calculer $\int_1^\alpha x \ln x\,dx$ on effectue une intégration par partie on obtient.

$\frac{\alpha}{2} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}$	oui	**non**
$\frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4}$	**oui**	non

2° $\int_0^\pi x \sin x\,dx$ est égal à

0	oui	**non**
π	**oui**	non

Soit le cube OABCDEFG représenté sur la figure ci-dessus. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD})$. On désigne par α un réel strictement positif. Les points L, M et K sont définis par : $\overrightarrow{OL} = \alpha\ \overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{OM} = \alpha\ \overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{BK} = \alpha\ \overrightarrow{BF}$ 1° a) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

$L(0\ ,\ \alpha\ ,\ 0)$, $M(\alpha,\ 0\ ,\ 0)$ $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \alpha\ \overrightarrow{OD}$ donc $K(1\ ,\ 1\ ,\ \alpha)$ et $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}0-0\\\alpha-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}0\\\alpha\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{OK} = 0\times 1 + \alpha\times 1 + (-1)\times\alpha = \alpha - \alpha = 0$

$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}\alpha-0\\0-0\\0-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}\alpha\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{OK} = \alpha\times 1 + 0\times 1 + (-1)\times\alpha = \alpha - \alpha = 0$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DL}\perp\overrightarrow{OK}\\\overrightarrow{DL}\perp\overrightarrow{OK}\end{array}\right\}$ donc $(OK)\perp(DLM)$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (DML)

$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (DLM) et d appartient au plan (DLM)

Equation de (DLM) : $x + y + \alpha\ z = x_D + y_D + \alpha\ z_D \Leftrightarrow \boxed{x + y + \alpha\ z = \alpha}$

2° On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DML). a) Démontrer que : $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM})\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$

En effet $\left.\begin{array}{l}(OK)\perp(DLM)\\(HM)\subset(DLM)\end{array}\right\}$ donc $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{OK} = 0$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que : $\overrightarrow{OH} = \lambda\ \overrightarrow{OK}$ Démontrer que : $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}$ En déduire que H appartient au segment [OK].

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK} = \lambda\ \overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OK} = \lambda\times(1 + 1 + \alpha^2) = (2 + \alpha^2)\ \lambda$

$\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = 1\times\alpha + 1\times 0 + \alpha\times 0 = \alpha$

On a donc $(2 + \alpha^2)\ \lambda = \alpha$ donc $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}$

Démontrer que $\lambda \le 1$.

$\dfrac{\alpha}{\alpha^2+2} \le 1 \Leftrightarrow \alpha \le \alpha^2 + 2 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2 - \alpha + 2$

Signe de $\alpha^2 - \alpha + 2$.

$\Delta = 1 - 4 < 0$ donc pour tout α : $\alpha^2 - \alpha + 2 \ge 0$ donc pour tout α , $\lambda \le 1$.

$\overrightarrow{OH} = \lambda\ \overrightarrow{OK}$ avec $0 < \lambda \le 1$ donc $H \in [OK]$

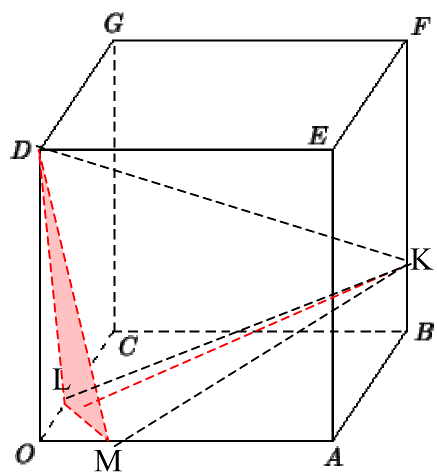
c) Déterminer les coordonnées de H.

$\overrightarrow{OH} = \lambda\ \overrightarrow{OK}$ donc $H\ (\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ \lambda\times\alpha)$ donc $H\left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}, \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}, \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+2}\right)$

d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que : $HK = \dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\sqrt{\alpha^2+2}}$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}\right)\overrightarrow{OK}$

$HK = \left|\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha^2+2}\right| \times OK = \dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\alpha^2+2}\times\sqrt{\alpha^2+2} = \dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\sqrt{\alpha^2+2}}$ car on a vu que $\alpha^2 - \alpha + 2 \ge 0$



3° A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de α.

$V = \frac{1}{3}$ aire (DLM) $\times$ KH

DLM est isocèle en D

$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}\alpha \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}$ donc $DM = \sqrt{\alpha^2 + 1} = DL$.

$\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}\alpha \\ -\alpha \\ 0\end{pmatrix}$ donc $DM = \alpha\sqrt{2}$

Soit I le milieu de [LM] on a $DI^2 + IM^2 = DM^2$ donc $DI = \sqrt{\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + 2}{2}}$

$\text{Aire(DLM)} = \frac{1}{2}\, DI \times LM = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\alpha^2 + 2}{2}} \times \alpha \times \sqrt{2} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + 2}}{2}$

$V = \frac{1}{3}$ aire (DLM) $\times KH = \frac{1}{3}\, \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + 2}}{2} \times \frac{\alpha^2 - \alpha + 2}{\sqrt{\alpha^2 + 2}} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 + 2\,\alpha}{6}$

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$ 1° a) Déterminer le sens de variations de cette suite.

Pour tout réel x de [0 ; 1], $e^{-t^2} \geq 0$ et $\dfrac{1}{1+n+t} \geq \dfrac{1}{2+n+t}$ donc $\forall x \in [\,0\,;\,1\,]$, $\dfrac{e^{-t^2}}{2+n+t} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t}$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{2+n+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$ donc $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

Pour tout réel x de [0 , 1], $\dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \geq 0$ donc $U_n \geq 0$

c) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,1]$ on a $\dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(In)_{n\in\mathbb{N}}$?

pour tout réel x de [0 , 1], $\dfrac{1}{1+n+t} \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n+1}\,dt$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \leq \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarme la suite (I_n) converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2° On considère f et g deux fonctions définies sur [0 ; 1] par : $f(x) = e^{-x} + x - 1$ et $g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$.

a) Etudier le sens de variations et le signe de f .

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$-e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0.$

Pour tout réel x de [0 , 1], $f'(x) \geq 0$. la fonction f est donc croissante sur [0 , 1].

Pour tout réel x de [0 , 1], $f(x) \geq f(0)$ donc $f(x) \geq 0$

b) En déduire le sens de variations de g sur [0 ; 1].

$g'(x) = -1 + x + e^{-x} = f(x)$ donc g est croissante sur [0 , 1].

c) Etablir, pour tout x appartenant à [0 ; 1], l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

g est décroissante sur [0 , 1] donc pour tout réel x de [0 , 1], $g(x) \geq g(0)$ c'est à dire $g(x) \geq 0$.

Pour tout réel x de [0 , 1],

$f(x) \geq 0$ donc $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ donc $e^{-x} \geq 1 - x$

$g(x) \geq 0$ donc $1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x} \geq 0$ donc $e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

On a donc bien : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à [0 ; 1].

On pose $x = t^2$

Pour tout réel t de [0 , 1], $t^2 \in [\,0\,,\,1\,]$ et donc $1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq 1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2}$

e) Etablir l'encadrement : $\dfrac{2}{3\,(n+2)} \leq I_n \leq \dfrac{23}{30\,(n+1)}$

Pour tout réel t de [0 , 1], $1 - t^2 \leq e^{-t^2} \leq 1 - t^2 + \dfrac{t^4}{2}$ et $\dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1+t} \leq \dfrac{1}{n+1}$

donc $\dfrac{1-t^2}{n+2} \leq \dfrac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \dfrac{1 - t^2 + \frac{t^4}{2}}{n+1}$

On intégre les inégalités sur [0 , 1] et on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}\,dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1 - t^2 + \frac{t^4}{2}}{n+1}\,dt$

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{n+2}\,dt = \left[\frac{1}{n+2}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3\,(n+2)}$$

$$\int_0^1 \frac{1-t^2+\frac{t^4}{2}}{n+1}\,dt = \left[\frac{1}{n+1}\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{10}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{n+1}\,\frac{30-10+3}{30} = \frac{23}{30\,(n+1)}$$

On a donc bien : $\dfrac{2}{3\,(n+2)} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt \leq \dfrac{23}{30\,(n+1)}$

f) Donner une valeur de p telle que $I_p \leq 10^{-2}$.

$I_p \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{23}{30\,(n+1)} \leq \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 230 \leq 3\,n+3 \Leftrightarrow 3\,n \geq 227 \Leftrightarrow n \text{ se } \dfrac{227}{3} \Leftrightarrow n \geq 76 \;\; (n \in \mathbb{N})$