Devoir maison n° 2 A rendre pour le 27 / 10 / 04

Intéressons-nous à l'un des plus célèbres problèmes de l'antiquité grecque (VII^e s. avant J.C.) : « La duplication du cube ». La légende rapporte que les habitants de Délos auraient reçu d'un oracle l'ordre de construire et de dédier à Apollon un autel cubique d'un volume double de celui qui existait déjà. Tout le problème était de construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$.

Les mathématiciens ont toujours recherché une construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\sqrt[3]{n}$; ce n'est qu'au XIV^e siècle que Wantzel montre que la construction d'un tel segment est impossible.
Platon a conçu un instrument qui permet une construction approximative de la solution (l'existence théorique de la solution posant un problème crucial).
Dioclès (II^e siècle avant J.C.) a mis en place une courbe (la cissoïde) permettant de représenter la racine cubique de t pour un t donné …L'étude de celle-ci est développé dans l'exercice ci-dessous.
Bien entendu il est impossible de construire la cissoïde à la règle et au compas. (C'est Wantzel qui le dit)

LA CISSOÏDE DE DIOCLES.

1 Un lieu géométrique :

A est le point de coordonnés (1 ; 0) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [OA] et Δ la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. $\mathcal{D}$ est une droite mobile passant par O, elle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N et la tangente Δ en Q. Soit enfin le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur t (t appartient à $\mathbb{R}$), la cissoïde est le lieu des points M quand t décrit $\mathbb{R}$.
Construire à la règle et au compas assez de points pour faire apparaître nettement l'allure de la cissoïde.

2 Recherche d'une équation cartésienne :

Donner une équation de $\mathcal{D}$, de Δ et les coordonnées de Q en fonction de t. Donner une équation de $\mathcal{C}$.
Démontrer que les coordonnées de N en fonction de t sont $\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$
En déduire que celles de M sont $\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right)$
Démontrer que les coordonnées (x ; y) de M vérifient la relation $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$ **(E)**.
On en déduit que la cissoïde est contenue dans l'ensemble des points du plan défini par l'équation :
"$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$."
Réciproquement, M(x ; y) est un point tel que : $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.
Si x = 0, montrer que M appartient à la cissoïde, quelle est alors la valeur de t ?
On suppose x non nul, on pose $t = \frac{y}{x}$, calculer x et y en fonction de t. Conclure.
Démontrer que $x(x^2+y^2) - y^2 = 0 \iff \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right) \times \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right) = 0$ pour x appartenant à [0 ;1[.

3 Etude d'une fonction :

f est la fonction définie sur [0 ;1[par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$, Γ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
a) Etudier la limite de f en 1. Qu'en conclure pour Γ ? Etudier la dérivabilité de f en 0.
b) Etudier les variations de f , dresser son tableau de variation.
c) Déterminer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d) Tracer Γ et T. Expliquer comment en déduire la cissoïde.

4 Retour au problème de la duplication du cube:

Reprendre les coordonnées de Q et M en fonction de t trouvées dans la partie b. P est le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées. Démontrer que les coordonnées de P sont (0 ; t^3).
Pour t > 0, AQ = t et OP = t^3 . Pour un segment de longueur t donné, comment construire à l'aide de la cissoïde un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$? Le faire à l'aide de Γ pour t = 2.

CORRECTION.

$\boxed{2}$ D droite passant par O de coefficient directeur t.

Equation de C : " $y = t \times x$ "

Soit I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} : 0\right)$. C est le cercle de centre I de rayon $\frac{1}{2}$

Equation de C : " $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ "

Equation de Δ : " $x = 1$ "

$$N(x,y) \in D \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} y = t\,x \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t\,x \\ x^2 - x + \frac{1}{4} + t^2\,x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t\,x \\ (1 + t^2)\,x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = t\,x \\ x\,(x\,(1 + t^2) - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t\,x \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = t\,x \\ x = \frac{1}{1 + t^2} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = t\,x \\ x = 0 \end{cases}$ correspond au point O $\neq$ N $\begin{cases} y = t\,x \\ x = \frac{1}{1 + t^2} \end{cases}$ donne les coordonnées de N $\left(\frac{1}{1 + t^2} : \frac{t}{1 + t^2}\right)$

On a Q(1 : t) donc $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{1 + t^2} \\ t - \frac{t}{1 + t^2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix} \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} \\ \frac{t + t^3 - t}{1 + t^2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$ donc M $\left(\frac{t^2}{1 + t^2} : \frac{t^3}{1 + t^2}\right)$

Les coordonnées de M vérifient $x = \frac{t^2}{1 + t^2}$ et $y = \frac{t^3}{1 + t^2}$ donc

$$x\,(x^2 + y^2) - y^2 = \frac{t^2}{1 + t^2} \times \left[\left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2\right] - \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2 = \frac{t^2}{1 + t^2} \times \left[\left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 \times t^2\right] - \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2$$

$$= \frac{t^2}{1 + t^2} \times \left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 (1 + t^2) - \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2 = t^2 \times \left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 - \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2 = \frac{t^6}{(1 + t^2)^2} - \left(\frac{t^3}{1 + t^2}\right)^2 = 0$$

Réciproque.

Soit M(x , y) tel que $x\,(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.

Si $x = 0$ alors $-y^2 = 0$ alors $y = 0$. M est le point O qui correspond au cas "limite" ou D = (Oy)

Si $x \neq 0$ alors on pose $t = \frac{y}{x}$ On a alors $y = t\,x$ et $x\,(x^2 + (t\,x)^2) - (t\,x)^2 = 0$ donc $x^3\,(1 + t^2) - t^2\,x^2 = 0$

donc $x\,(1 + t^2) - t^2 = 0$ $(x \neq 0)$ donc $x = \frac{t^2}{1 + t^2}$.

Le point M a ses coordonnées qui vérifient : $x = \frac{t^2}{1 + t^2}$ et $y = t \times \frac{t^2}{1 + t^2}$. M est donc le point de la cissoïde qui correspond au cas où D est la droite passant par O de coefficient directeur $t = \frac{y}{x}$.

$\forall\, x \in [\,0 : 1\,[\,: x\,(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x\,y^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^2\,(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{1 - x} - y^2 = 0$ $(x \neq 1)$

$x \in [\,0 : 1\,[$ donc $\frac{x^3}{1 - x} \geq 0$. on a donc :

$$\forall\, x \in [\,0 : 1\,[\,: x\,(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{x^3}{1 - x}}\right)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}}\right) \times \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}}\right) = 0$$

$\boxed{3}$ a) $\lim\limits_{x \to 1^-} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1 - x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Γ admet la droite d'équation "$x = 1$ " comme asymptote.

$f(0) = 0$. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}} \times \frac{1}{x} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{\frac{x}{1 + x^2}} \times \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{x}{1 + x^2}}$ $(x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.*

b) Soit U la fonction définie sur] 0 : 1 [par : $U(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

b) U est dérivable sur] 0 ; 1 [et ne s'annule pas sur] 0 : 1 [donc $f = \sqrt{U}$ est dérivable sur] 0 : 1 [.

$$U'(x) = \frac{3\,x^2 \times (1-x) - x^3 \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{3\,x^2 - 3\,x^3 + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3\,x^2 - 2\,x^3}{(1-x)^2}$$

$$\forall\, x \in\ ]\,0 : 1\,[,\ f'(x) = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \frac{3\,x^2 - 2\,x^3}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}} = \frac{x^2\,(3-2\,x)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1-x}{x^3}}$$

$\forall x \in$ [] 0 : 1 [, $\dfrac{x^2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{1-x}{x^3}} > 0$ donc f '(x) est du signe de 3 – 2 x.

$3 - 2\,x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$ ce qui est vrai pour tout réel x de] 0 : 1 [.f est donc croissante sur] 0 : 1 [.

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{1}} = \dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{4}{1} \times \dfrac{1}{2} \times 2 = 2$. Equation de T : $y = \dfrac{1}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire "$y = 2\,x - \dfrac{1}{2}$"

d) On trace Γ et on trace Γ ' la courbe symétrique de Γ par rapport à (Ox). La cissoïde est la réunion de Γ et Γ '.

$\boxed{4}$ Q (1 : t) et $M\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} : \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$

$$P\,(x : y) \in (AM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \text{et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{1+t^2} - 1 \\ \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix} \text{colinéaires} \Leftrightarrow (x-1) \times \frac{t^3}{1+t^2} - y\left(\frac{t^2}{1+t^2} - 1\right) = 0$$

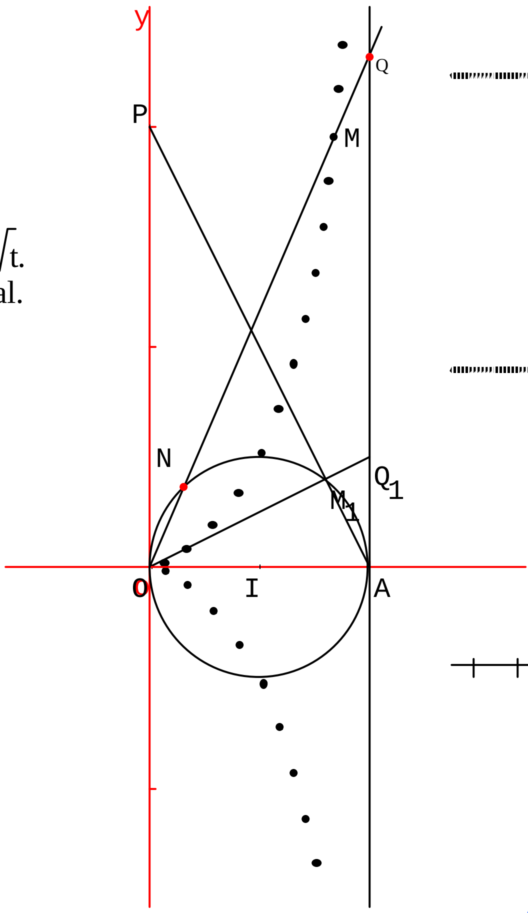
$$P(\,0 : y) \in (AM) \cap (Oy) \Leftrightarrow (0-1) \times \frac{t^3}{1+t^2} - y\left(\frac{t^2}{1+t^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow -\ y\,\frac{t^2 - t^2 - 1}{1+t^2} = \frac{t^3}{1+t^2}$$

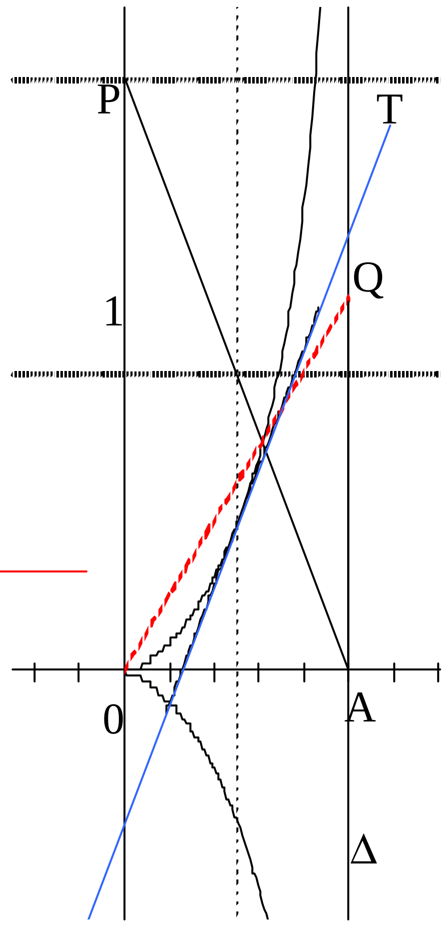
$$\Leftrightarrow y = -\ \frac{t^3}{1+t^2} \times \frac{1+t^2}{-1} \Leftrightarrow y = t^3.$$

Si AQ = t alors OP = t^3

Réciproquement si OP = t alors AQ = $\sqrt[3]{t}$.
On place le point P (t ; 0).
La droite (AP) coupe la cissoïde en M.

La droite (OM) coupe alors Δ en Q et AQ = $\sqrt[3]{t}$.
Attention le repère choisi doit être orthonormal.





Pour en savoir plus sur la cissoïde de Diocles… voir notre ami Google
Et plus directement http://www.mathcurve.com/courbes2d/cissoiddroite/cissoiddroite.shtml
Pour la voir se construire http://perso.wanadoo.fr/jpq/courbes/cissoide.htm