

Ex I Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$1^\circ \quad \frac{2z+1}{2iz+1} = \frac{iz+3i}{1-z} \quad 2^\circ \quad z\bar{z} = 3(\bar{z}-z) + 13 + 18i \quad 3^\circ \quad z^2 + (1+\sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$$

Remarque : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

Ex II Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + (-2-3i)z^2 + 3(1+2i)z - 9i$.

1° Montrer que P admet une racine imaginaire pure (c'est-à-dire de la forme ix où x est réel).

2° Factoriser $P(z)$.

3° En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Ex III Soit z un nombre complexe différent de -1 . On considère le nombre complexe $Z = \frac{z}{1+z}$.

1° Déterminer de deux façons différentes l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Re}(Z) = 0$

a) En posant $z = x + iy$, x et y réels.

b) En utilisant la propriété Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$.

2° Déterminer de deux façons différentes l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Im}(Z) = 0$

a) En posant $z = x + iy$, x et y réels

b) En utilisant la propriété : Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$.

3° Représenter les ensembles E et F dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

Ex IV On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ et on appelle (C) sa courbe

représentative dans un repère orthonormal du plan.

1° Montrer que f est dérivable sur D et étudier les variations de f sur D

2° Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3° a) Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que : pour tout réel x distinct de 1 : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Montrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (Δ) que l'on précisera. Etudier la position de (C) par rapport à Δ

4° Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 2$. Montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe (C) où la tangente est parallèle à D . Préciser les coordonnées de A et B ainsi qu'une équation des tangentes Δ_1 et Δ_2 .

5° Montrer que le point $I(1, -5)$ est centre de symétrie de la courbe (C) .

6° Construire la courbe (C) ainsi que ses asymptotes et Δ_1 et Δ_2 .

Ex V Calculer les limites suivantes au point x_0

$$1^\circ \quad \frac{\cos 2x + 1}{\sin x - 1} \quad 2^\circ \quad \sqrt{9x^2 + 4} + 3x \quad 3^\circ \quad \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}{x^2 - 4x + 3} \quad 4^\circ \quad \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$x_0 = \frac{\pi}{2} \quad x_0 = +\infty \text{ et } x_0 = -\infty \quad x_0 = 3 \quad x_0 = +\infty$$

Ex VI 1° Fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

a) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 1 , on a : $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x} + \cos x \leq 1 + \sqrt{x}$.

b) En déduire que, pour $x > 1$, $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq \varphi(x) \leq \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

c) Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.