T S_4 : 2 h **Devoir surveillé n°1** Jeudi 4 octobre 2001

Ex I On considère la fonctions définie sur $]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

1° Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation " $x = -1$ " comme axe de symétrie.

On étudie donc f sur [1 ; + ¥ [

2° Etudier les variations de f sur $[1 ; +\infty[$.

3° Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ d'équation " $y = x + 1$ " et préciser les positions respectives de $\mathcal{C}_f$ et Δ .

4° Dérivabilité au point 1 . Etudier la limite à droite au point 1 du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. On admettra que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 1 .

5° Tracer Δ puis $\mathcal{C}_f$ en utilisant l'axe de symétrie $\mathcal{D}$.

Ex II Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Etudier la limite de f en 1.

2° Etudier les variations de la fonction f . ($f'(x) = \dfrac{x^2 (x-3)}{(x-1)^3}$)

3° a) Déterminer les réels a , b , c et d tels que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = a x + b + \dfrac{c x + d}{(x-1)^2}$,

b) En déduire que la droite $\mathcal{D}$ d'équation " $y = x + 2$ " est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

c) Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ et les coordonnées du point I commun à la courbe $\mathcal{C}_f$ et à la droite $\mathcal{D}$.

4° Déterminer l'abscisse du point J de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$, puis l'équation de cette tangente.

5° On se propose d'étudier les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite $\mathcal{D}_p$ d'équation " $y = x + p$ "

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}_p$ sont les solutions de l'équation

$$(E) : (p-2)\, x^2 + x\,(1 - 2p) + p = 0 .$$

b) Pour quelles valeurs de p courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation "$y = x + p$" ont-elles deux points communs ?

5° Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$. hors barème

Ex III 1° Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1}$	$\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{3x+1}{x^2-1}}$

2° Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$, calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - 1\right)$

3° La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$.

a) Montrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(2 - \cos x)}$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{2 - \cos x}$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 (2 - \cos x)}$