T S_4 1 h **Devoir surveillé n°2** Mardi 12 novembre 2001

<u>Exercice I</u>

On se propose de résoudre l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$.

1° Déterminer les réels y tels que i y soit solution de (E).

2° Déterminer les réels a et b tels que pour tout complexe z : $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + az + b)$

3° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

<u>Exercice II</u>

Soit z un nombre complexe différent de – i. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{z - i}{i(z + i)}$.

1° Calculer le complexe T_0 obtenu pour z = 3 i ; déterminer le module et un argument de T_0.

2° Dans cette question on pourra poser T = U + i V et z = x + i y où U, V, x et y sont réels.

a) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que T soit réel.

b) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que T soit imaginaire pur

3° Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe – i.

Donner une interprétation géométrique de $|T|$ (module de T).

Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points d'affixe *z* tels que $|T| = 1$.

<u>Exercice III</u> Soit la suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par

$U_0 = a$ et la relation : $U_{n+1} = \dfrac{6 + U_n}{2 + U_n}$, avec $0 \leq a \leq 2$.

1° Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq U_n \leq 2$.

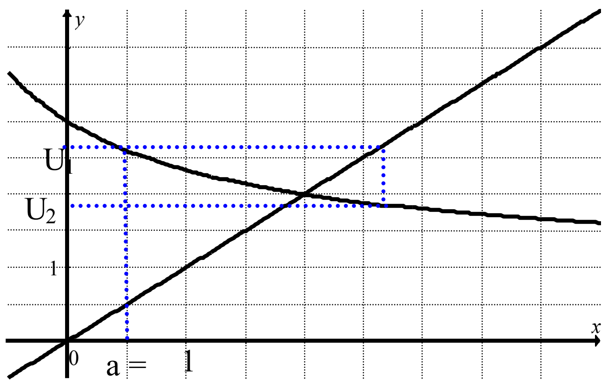
2° a) Montrer que pour tout entier n : $2 - U_{n+1} = \dfrac{2 - U_n}{U_n + 2}$.

b) En déduire que pour tout entier n : $0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$

3° Montrer par récurrence que pour tout entier n :

$$0 \leq 2 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

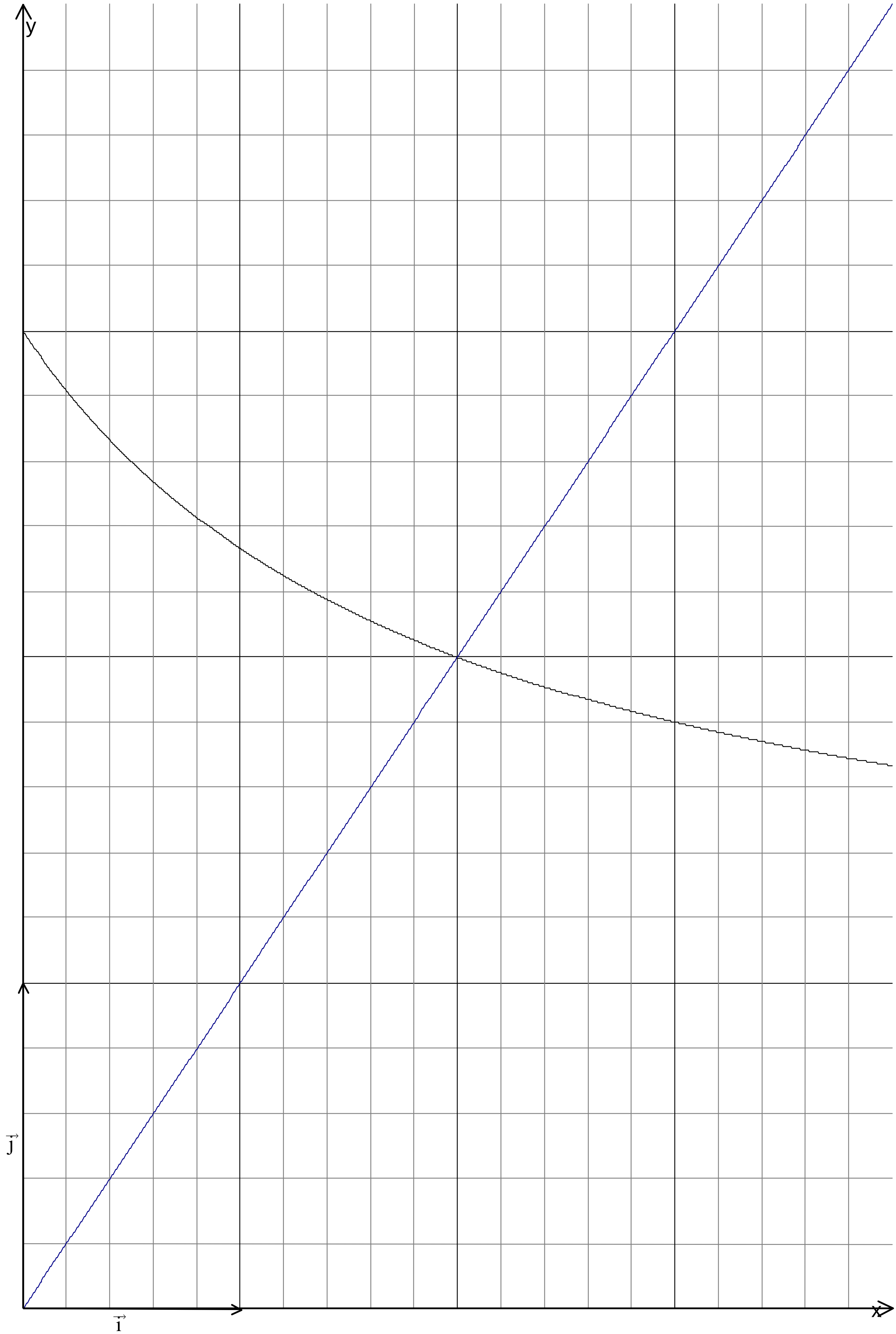
En déduire la limite de la suite (U_n).



<u>Exercice II</u>

Déterminer les primitives sur I des fonctions suivantes

a) $f : x \longmapsto 4x^2 - 5 + \dfrac{5}{x^2}$ $I =]\,0\,;+\infty\,[$	**b)** $f : x \longmapsto \dfrac{4x^2 - 3x + 7}{x^4}$ $I =]\,0\,;+\infty\,[$	**c)** $f : x \longmapsto \dfrac{5}{(5x + 4)^3}$ $I =]-\dfrac{4}{5}\,;+\infty\,[$



y
x
$\vec{j}$
$\vec{i}$