Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Vérifier que l'on peut réduire l'ensemble d'étude de f à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

2° Démontrer que, pour tout réel x, f '(x) est du signe de : $4 \cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$
Etudier les variations de f sur $[0 ; 2\pi]$ et dresser son tableau de variation.
Donner les valeurs exactes des extrema, et préciser en justifiant s'il s'agit de mimima ou de maxima.

3° Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

4° Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ sur $\left[0 , \frac{\pi}{6}\right]$

5° On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0 ; 2\pi]$. (l'unité graphique n'est pas précisée) En utilisant les questions précédentes compléter le tracé sur $[-\pi , 2\pi]$ et tracer la droite $\mathcal{T}$

Exercice II

Soit la fonction f définie sur $]1 , +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
Le but du problème est l'étude de la fonction f.

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $]1 , +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1° Etudier les variations de la fonction g.

2° Montrer qu'il existe un réel α unique dans l'intervalle $[2 , 3]$tel que $g(\alpha) = 0$.

3° Déduire des questions précédente le signe de g(x) sur $]1 , +\infty[$

Partie B Etude de la fonction f

1° Déterminer les limites de la fonction f en 1

2° Démontrer que pour tout x de $]1 , +\infty[$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f

3° a) Démontrer que pour tout x de $]1 , +\infty[$: $f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$.

b) En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$.

4° Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ (On admettra que $\alpha \approx 2,2$ et que $f(\alpha) \approx 5,3$)

Exercice III

1° Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes donnés :

$a = -1 + i$	$b = 1 - i\sqrt{3}$	$c = \frac{1}{2}$	$d = -3i$	$e = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

2° Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants

$A = a^3 = (-1 + i)^3$	$B = \frac{a}{b} = \frac{-1 + i}{1 - i\sqrt{3}}$	$C = \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \left(\frac{-1 + i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^6$

3° Les points A, B, C ont pour affixes: $z_A = a = -1 + i$, $z_B = b = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = c = \frac{1}{2}$.
Quelle particularité présente le triangle ABC ?

4° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z^3 - 5z^2 + 3z - 4 = 0$.

Ex I

1° f est périodique de période 2π

2° $f'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x$

$= -4\sin x\cos x + 2\cos x$

$= 4\cos x\left(-\sin x + \frac{1}{2}\right)$

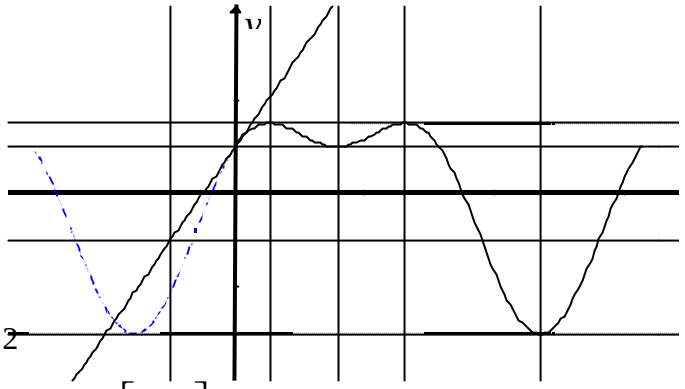
-3 minimum, $\frac{3}{2}$ maximum,

1 minimum local

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	+		+		0	–	+		0	–	
$\frac{1}{2} - \sin x$	+		0	–	–		0	+	+		
f '(x)	+		0	–	0	+	0	–	0	+	
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	1

3° $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(\pi + 2x) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos 2x + 2\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - 2x) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos 2x + 2\cos x$



4° $f(0) = 1$ et $f'(x) = 2$.

Equation de la tangente : $y = 2x + 1$

$g(x) = f(x) - (2x + 1) = \cos 2x + 2\sin x - 2x - 1$.

$g'(x) = -2\sin 2x + 2\cos x - 2$.

$0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ donc $0 \le \sin 2x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 \le \cos x \le \frac{1}{2}$.

On a donc $-2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times 0 - 2 \le g'(x) \le -2\times 0 + 2\times\frac{1}{2} - 2$

c'est-à-dire $-\sqrt{3} - 2 \le g'(x) \le -1 < 0$. g est donc décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ on a : $g(x) \le 0$ ($g(0) = 0$) donc C_f est au dessous de T

ex II A 1° $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 1$ sur $]1, +\infty[$. g est croissante sur $]1, +\infty[$.

2° g dérivable et strictement croissante sur $]1, +\infty[$,

$g(2) < 0 < g(3)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[2, 3]$.

3° D'après les variations de g si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$

et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$ $(g(\alpha) = 0)$

B 1° $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} x^3 + 2x^2 = 3$

donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

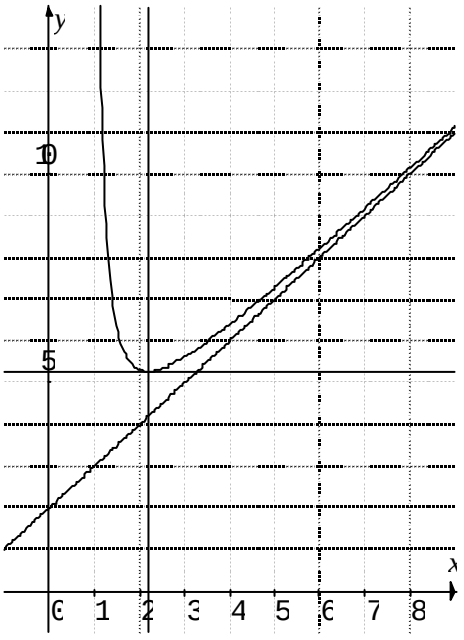
x	1		α		$+\infty$
signe de f '(x)		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2° $f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$.

sur $]1, +\infty[$ f '(x) est du signe de g(x)

3° a) $x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1} = \frac{(x+2)(x^2-1) + x + 2}{x^2 - 1} = f(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ Donc T est bien asymptote à C_f



Ex III 1°

$a = -1 + i$ $= \left[\sqrt{2}\,,\, \frac{3\pi}{4}\right]$	$b = 1 - i\sqrt{3}$ $= \left[2\,,\, -\frac{\pi}{3}\right]$	$c = \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}\,,\, 0\right]$	$d = -3i$ $= \left[3\,,\, -\frac{\pi}{2}\right]$	$e = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ $= \left[2\sqrt{2}\,,\, \frac{\pi}{6}\right]$

2° $A = a^3 = (-1 + i)^3$

$A = a^3 = \left[(\sqrt{2})^3\,,\, 3\frac{3\pi}{4}\right] = \left[2\sqrt{2}\,,\, \frac{\pi}{4}\right] = 2 + 2i$

$A = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 \times i + 3 \times (-1) \times i^2 + i^3 = -1 + 3i\,3 - i \ldots$

$B = \frac{a}{b} = \frac{-1 + i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i)(1 + i\sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{4} + i\frac{-\sqrt{3} + 1}{4}$.

$C = \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \left(\frac{-1 + i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^6 = \frac{a^6}{b^6}$.

$a^6 = \left[(\sqrt{2})^6\,,\, 6\frac{3\pi}{4}\right] = \left[8\,,\, \frac{9\pi}{2}\right] = -8i$. et

$b^6 = \left[2^6\,,\, -\frac{\pi}{3} \times 6\right] = [64\,,\, -2\pi] = 64$.

Donc $C = -\frac{i}{8}$

3° $AB = |b - a| = |2 - (\sqrt{3} + 1)i| = \sqrt{2(\sqrt{3} + 4)}$,

$AC = |c - a| = \left|\frac{3}{2} - i\right| = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

$BC = |c - b| = \left|-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right| = \frac{\sqrt{13}}{2}$

ABC est isocèle en C.

4° 1 est racine évidente de l'équation : $3z^3 - 5z^2 + 6z - 4 = 0$

Donc $3z^3 - 5z^2 + 6z - 4 = (z - 1)(3x^2 - 2x + 4)$.

Equation $3x^2 - 2x + 4 = 0$.

$\Delta = 4 - 4 \times 4 \times 3 = -44 = (2i\sqrt{11})^2$

deux solutions $\frac{1 + i\sqrt{11}}{3}$ et $\frac{1 - i\sqrt{11}}{3}$.

l'équation $3z^3 - 5z^2 + 6z - 4 = 0$ admet donc trois solutions 1, $\frac{1 + i\sqrt{11}}{3}$ et $\frac{1 - i\sqrt{11}}{3}$.