T S_2 : 2 h **Devoir surveillé n°3** Jeudi 25 novembre 2004

$\boxed{1}$ Question de cours.

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

- exp est une fonction dérivable sur IR;
- sa fonction dérivée, notée exp' est telle que, pour tout nombre réel x, exp'(x) = exp(x) ;
- exp(0) = 1.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp,

a) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$

b) En déduire que la fonction exp est strictement positive sur IR puis que la fonction exp est croissante sur IR

c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

$\boxed{2}$ On se propose de déterminer le signe du minimum de la fonction f définie sur] 0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

A On considère la fonction h définie sur] 0 ; + ∞ [par :

$$h(x) = x\,e^x - 2\,e^x + 2.$$

1° Déterminer la limite de h en + ∞.

2° Dresser le tableau de variations de h.

3° a) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle [1 ; 2] tel que $h(\alpha) = 0$.

b) En déduire le signe de h sur] 0 ; + ∞ [

c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{2}{2-\alpha}$

B Etude de f.

1° a) Calculer la limite de f en x = 0.

b) On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Calculer alors la limite de f en + ∞

2° Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x\,e^x - 2\,e^x + 2}{x^3}$.

En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

3° Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$

En déduire le signe de $f(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Soit M, M' et M'' les points du plan complexe d'affixes respectives: z, z + i et i z.

1° Pour quel nombre complexe z a-t-on M' = O, origine du repère ?

Pour quel nombre a-t-on : M' = M '' ?

2° a) On suppose z distinct de 0, de – i et $\dfrac{1-i}{2}$

Prouver que les points O, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

b) On pose x = Re (z) et y = Im (z), avec $z \neq 0$.

Calculer $\text{Im}\left(\dfrac{z+i}{iz}\right)$ en fonction de x et y.

3° Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M tels que O, M' et M'' sont deux à deux distincts et alignés.

$\boxed{4}$ Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère le point A d'affixe 1 et , pour tout θ appartenant à [0; 2 π [, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$.

On désigne par P le point d'affixe 1 + z et par Q le point d'affixe z^2.

1° Déterminer l'ensemble des points M pour θ appartenant à [0, 2 π [.

2° A partir du point M ,donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O ,A , M, Q et P seront placés sur une même figure.

3° Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à [0, 2 π [.

Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

4° Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z désigne toujours l'affixe du point M.. Construire S.

5° Dans le cas où S est différent de O , Tracer la droite (OS).

Quelle conjecture apparaît , relativement au point M ?

Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{z}$ est un réel , quel que soit θ appartenant à [0 , 2 π [.

Conclure sur la conjecture précédente.

Devoir maison n° 69 p 92 à rendre le Jeudi 2 décembre.

$\boxed{1}$ a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)}$

h '(x) = exp '(x) × exp (–x) + exp (x) × (– exp (–x)) = 0.

h ' = 0 sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, exp (x) × exp (– x) = 1 ≠ 0 donc pour tout réel x , $\boxed{\exp(x) \neq 0.}$

exp ne s'annule pas sur l' **intervalle** $\mathbb{R}$ et exp est **dérivable** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ donc exp ne change pas de signe sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$. exp (0) > 0 donc pour tout réel x, $\boxed{\exp(x) > 0}$

exp ' = exp et exp > 0 sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{exp est croissante sur } \mathbb{R}.}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1.}$

$\boxed{2}$ A 1° $h(x) = e^x (x - 2) + 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2)\, e^x = +\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty.}$

2° $h'(x) = e^x + x\, e^x - 2\, e^x = \boxed{e^x (x - 1).}$

		1		α	
fh'(x)	–	0	+		
h	0 ↘	2 – e < 0	↗	0	↗ + ∞
h (x)	–			0	+

3° a) h est **continue** sur $\mathbb{R}$ donc d'après les **variations** de h l'équation h(x) = 0 admet une solution dans [1 ; + ∞[

h(1) < 0 < h(2) donc $\alpha \in [1 : 2]$

b) D'après les variations de h on a : $0 < x < a \Rightarrow h(x)$ et $x > \alpha \Rightarrow h(x) > 0$.

c) $h(\alpha) = 0$ donc $\alpha\, e^\alpha - 2\, e^\alpha + 2 = 0$ donc $e^\alpha (\alpha - 2) = -2$ donc $e^\alpha = \dfrac{-2}{\alpha - 2} = \dfrac{2}{2 - \alpha}$

B 1° a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

b) $\dfrac{e^{2x}}{x^2} = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2} = +\infty$. On pose X = 2 x on a $X^2 = 4\, x^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} 4\, \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

2° $f'(x) = \dfrac{e^x \times x^2 - 2\, x \times (e^x - 1)}{x^4}$

$= \dfrac{x\,(x\, e^x - 2\, e^x + 2)}{x^4} = \boxed{\dfrac{x\, e^x - 2\, e^x + 2}{x^3}}$

e d	0		α		+ ∞
f '(x)		–	0	+	
f	+ ∞	↘	f(α)	↗	+ ∞

3° $f(a) = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{\dfrac{2}{2 - \alpha}}{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha\,(2 - \alpha)} = \dfrac{-2}{\alpha\,(\alpha - 2)}$. On sait que $1 \le \alpha \le 2$ donc $\boxed{\dfrac{2}{\alpha\,(\alpha - 2)} < 0.}$

$\boxed{3}$ 1° M' = O si et seulement si $z + i = 0$ si et seulement si $\boxed{z = -i}$

M' = M'' $\Leftrightarrow z + i = i z \Leftrightarrow i = i z - z \Leftrightarrow z (i - 1) = i$ si et seulement si $z = \dfrac{i}{i-1} = \dfrac{i(-i-1)}{1+1} = \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i.}$

2° a) O, M' et M'' alignés si et seulement si $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ colinéaires c'est-à-dire si et seulement si existe un réel k tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM''}$.

$z' = k z'' \Leftrightarrow \dfrac{z+i}{i z} = k$. On a donc $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ colinéaires si et seulement si $\dfrac{z+i}{i z} \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{z+i}{i z} = \dfrac{x + i y + i}{i(x + i y)} = \dfrac{x + i y + i}{i x - y} = \dfrac{(x + i y + i)(-i x - y)}{x^2 + y^2} = \dfrac{-i x^2 - x y + x y - i y^2 + x - i y}{x^2 + y^2}$

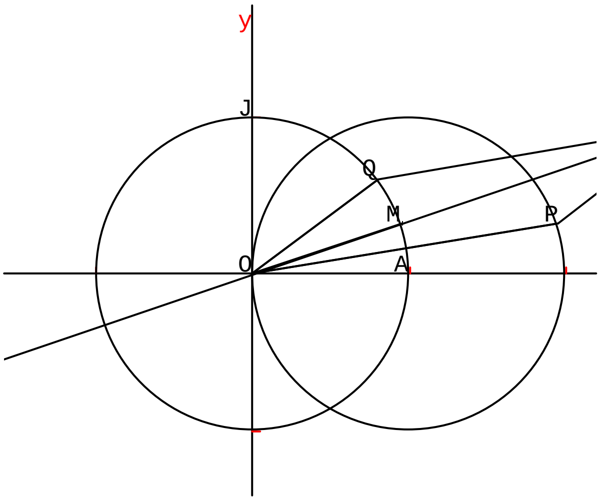
$$\boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{i z}\right) = \frac{-x^2 - y^2 - y}{x^2 + y^2}.}$$

3° O , M et M' sont deux à deux distincts et alignés si et seulement si $z \neq -i$, $z \neq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i$, $z \neq 0$ et $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z+i}{i z}\right) = 0$

$\operatorname{Im}\left(\dfrac{z+i}{i z}\right) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - y^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}.$

On trouve l'équation du cercle de centre $I\left(1 - \dfrac{i}{2}\right)$ de rayon $\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{4}$ 1° M est sur le cercle trigonométrique.



2° On trace P tel que MOAP soit un parallélogramme.

Q est le symétrique de A par rapport à la droite (OM).

3° P est sur le cercle de centre A de rayon 1.

4° $1 + z + z^2$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS}$.

5° M semble être sur la droite (OS)

$z = e^{i\theta}$ et $\dfrac{1 + z + z^2}{z} = \dfrac{1}{z} + 1 + z = \dfrac{1}{e^{i\theta}} + 1 + e^{i\theta} = e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 1 = 2\cos\theta + 1 \in \mathbb{R}$

O, M et S sont bien alignés.