

Exercice I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

On désigne par C sa courbe représentative (unité graphique 2 cm).

1° Montrer que cette fonction est impaire.

2° Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$

3° Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4° Prouver que les droites $D : y = x + 1$ et $D' : y = x - 1$ sont asymptotes à la courbe C .

5° Etudier les variations de la fonction f .

6° Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$. Démontrer que la fonction g est décroissante.

En déduire la position de C par rapport à T

7° Tracer la courbe C et les droites D , D' et T .

Exercice II

Soit la suite de points M , du plan complexe d'affixes respectives définies par :

$$z_0 = 8 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

1° Calculer le module et un argument de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$. Ecrire ce nombre complexe sous forme trigonométrique.

2° Calculer z_1 , z_2 , z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer dans le plan les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3

3° Calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$ et en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que :

$$|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3} |z_{n+1}|$$

Exercice III

1° Ecrire sous forme trigonométrique le complexe $1 + i$.

2° On pose $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

2° a) Calculer z^2 et $(1 + i)\bar{z}$ en fonction de ρ et θ ($\bar{z}$ désignant le complexe conjugué de z)

b) En déduire la valeur r de ρ pour laquelle on a l'égalité : (1) $z^2 = (1 + i)\bar{z}$.

c) Déterminer les valeurs θ_0 , θ_1 et θ_2 de θ telles que $z = \rho e^{i\theta}$ vérifie l'égalité (1).

On note respectivement z_0 , z_1 et z_2 les nombres complexes de module r et d'arguments θ_0 , θ_1 et θ_2 .

3° Soit A_1 et A_2 les points d'affixes respectives : $z_1 - z_0$, et $z_2 - z_0$ dans le plan complexe, et O le point d'affixe

nulle. Calculer, sous sa forme trigonométrique, le nombre complexe : $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$

En déduire que le triangle OA_1A_2 est équilatéral.