Exercice 1 5 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 2 , b = 1 – i et c = 1 + i .

1° a)Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2° a) On appelle r la rotation de centre A telle que r(B) = C.

Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point D = r(C).

b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC].

Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .

3° Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .

a.)Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{2} [\cup] \frac{\pi}{2} ; +\infty [$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b) Exprimer z' en fonction de θ .

c) Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1+ e^{2i\pi/3}$ et construire son image M' par r .

Exercice 2 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 6 cm). On considère la suite a_n de nombres réels définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{5\pi}{6}$$

Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure a_n.

1° Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}$.

2° On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3° a) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$

c) En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

Problème 10 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + (1 - x)\, e^{2x})$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm)

1° a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

2° Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

3° Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)\, e^{2x}$.

a) Etudier le sens de variation de u.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$possède une solution unique α dans l'intervalle [0 , 1].

Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

c) Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x.

4° Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Les courbes Γ et $\mathscr{D}$ sont tracées sur la feuille annexe.

1° Soit t un réel ; on désigne par M_t le point de Γ d'abscisse t.

La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.

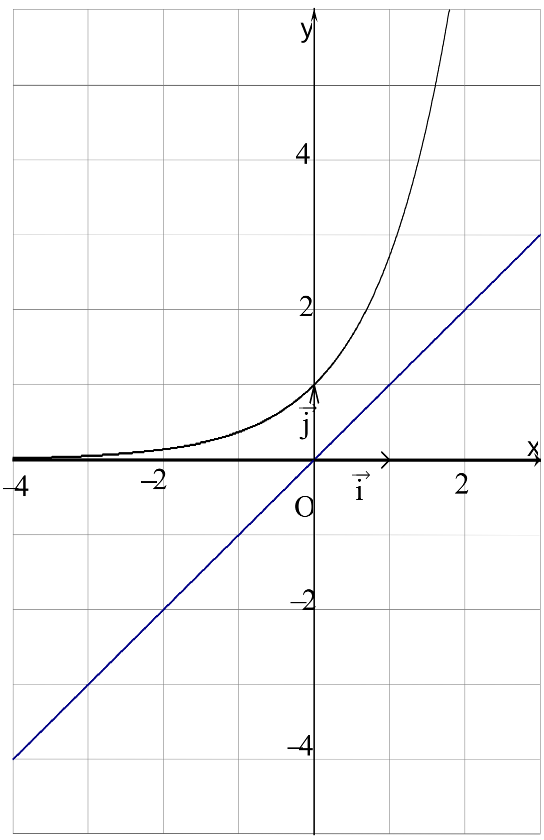
Déterminer les coordonnées du point N_t.

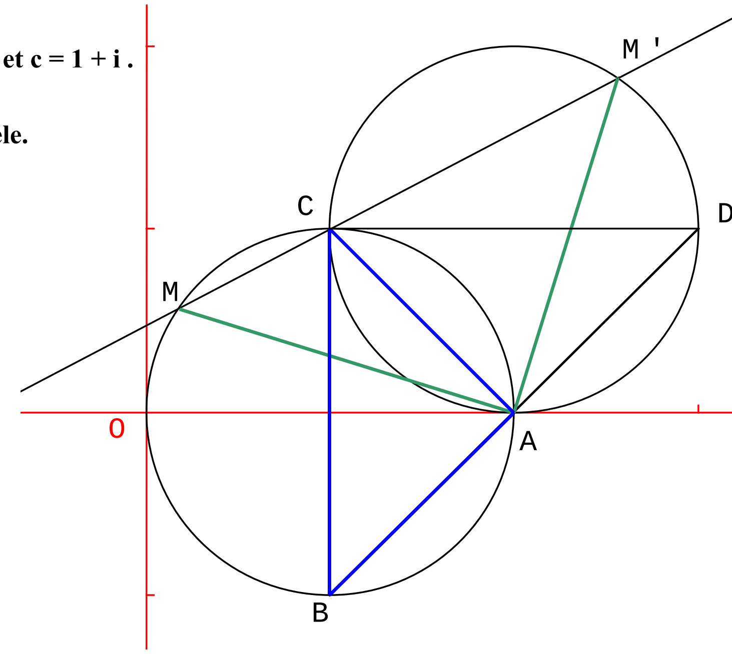
2° On désigne par P_t le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés (O ; 1), (M_t ; 1), (P_t ; 1) et (N_t ; 1).

a) Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2}, puis construire, en justifiant, le point G_{-2}, sur la feuille annexe.

b) Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.

3° Quel est l'ensemble des points G_t , quand t décrit $\mathbb{R}$?





Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$,
on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.
1° a)Placer les points A, B et C sur une figure.

b) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i-2}{1-i-2} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{1+1}$$
$$= \frac{1-i-i-1}{2} = -i.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB} = 1 \text{ donc } AB = AC \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AN}\,,\,\overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \end{array}\right\}$$

ABC rectangle isocèle en A

2° a) On appelle r la rotation de centre A telle que r(B) = C.
Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point D = r(C).

Soit α l'angle de cette rotation $\alpha = (\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$

$z_D - z_A = e^{-i\,\pi/2}\,(z_C - z_A)$ donc
$d = z_D = a - i\,(c - a) = 2 - i\,(1 + i - 2) = 2 + i + 1 = 3 + i.$

b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer et construire l'image Γ ' du cercle Γ par la rotation r .

r(B) = C et r(C) = D donc l'image du cercle de diamètre [BC] est le cercle de diamètre [CD].

3° Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .

a.)Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $[0\,;\,\frac{\pi}{2}[\,\cup\,]\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\,[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

Soit Ω le centre du cercle de diamètre [BC] son affixe est égale à : $\omega = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{1-i+1+i}{2} = 1$

Rayon du cercle de diamètre [BC] : $r = \dfrac{|\,b-c\,|}{2} = \dfrac{|1-i-1-i|}{2} = 1.$

M est sur le cercle de diamètre [BC] donc il existe θ dans $[\,0\,;\,2\,\pi\,[$ tel que $z = \omega + r\,e^{i\theta} = 1 + e^{i\theta}$

Comme $M \neq C$ et que $c = 1 + e^{i\pi/2}$ on a en plus $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$

b) Exprimer z' en fonction de θ .

$z' - a = e^{-i\,\pi/2}\,(z - a)$ donc $z' = 2 - i\,(1 + e^{i\theta} - 2) = 2 + i - i\,e^{i\theta} = 2 + \cos\theta + i\,(1 - \sin\theta)$

c) Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

$$\frac{z'-c}{z-c} = \frac{1-i\,e^{i\theta}}{e^{i\theta}-i} = \frac{(1-i\,e^{i\theta})\,(e^{-i\theta}+i)}{|\,e^{i\theta}-i|^2} = \frac{e^{-i\theta}+i-i+e^{i\theta}}{|\,e^{i\theta}-i\,|^2} = \frac{2\cos\theta}{|\,e^{i\theta}-i\,|^2} \in \mathbb{R}$$

donc $\dfrac{z'-c}{z-c} \in \mathbb{R}$ donc $\arg\left(\dfrac{z'-c}{z-c}\right) = k\,\pi$ donc $(\overrightarrow{CM'}\,,\,\overrightarrow{CM}) = k\,\pi$ donc les vecteur $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires

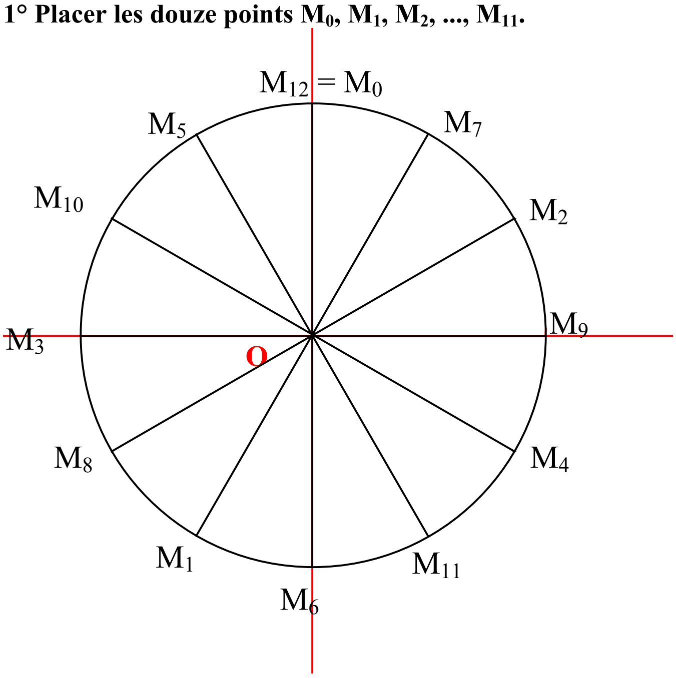
donc les points C, M et M' sont alignés.

d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1+e^{2i\pi/3}$ et construire son image M' par r .

M est sur le cercle de diamètre [BC] donc M' est sur le cercle de diamètre [CD]
on a vu que C, M et M' sont alignés. M' est donc à l'intersection du cercle Γ' et de la droite (CM) privée de C.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 6 cm). On considère la suite a_n de nombres réels définie par $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = a_n + \frac{5\pi}{6}$ Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure a_n.

1° Placer les douze points $M_0, M_1, M_2, ..., M_{11}$.



2° On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

z_n est le complexe de module 1 d'argument a_n donc $z_n = e^{i\,a_n}$

Comme la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{5\pi}{6}$ on a pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \times n$

On a donc bien $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3° a) Montrer pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- **les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés;**
- **les points M_n et M_{n+12} sont confondus.**

$a_{n+6} = a_n + 6 \times \frac{5\pi}{6} = a_n + 5\pi$.

On a donc $z_{n+6} = e^{ia_{n+6}} = e^{ia_n} \times e^{i\pi} = - e^{ia_n} = - z_n$ donc O est bien le milieu de $[M_n M_{n+6}]$

$a_{n+12} = a_n + 12 \times \frac{5\pi}{6} = a_n + 10\pi$. $z_{n+12} = e^{ia_{12}} = e^{ia_n} \times e^{2i\pi} = e^{ia_n} = z_n$ donc $M_{n+12} = M_n$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$

$a_{n+4} = a_n + 4 \times \frac{5\pi}{6} = a_n - \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ donc $z_{n+4} = e^{ia_{n+4}} = e^{ia_n} \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$

c) En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

$|z_{n+4} - z_n| = \left| z_n \times e^{-\frac{2i\pi}{3}} - z_n \right| = |z_n| \times \left| e^{-\frac{2i\pi}{3}} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

On a donc bien $M_nM_{n+4} = \sqrt{3}$. De même $M_{n+4}M_{n+8} = \sqrt{3}$ et $M_{n+4}M_{n+12} = \sqrt{3} = M_{n+4}M_n$

Le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + (1 - x)\,e^{2x})$ On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm) 1° a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) = \frac{x\,e^{2x}}{2}\left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{x} - 1\right)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\,e^{2x}}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{x} - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = \frac{x}{2} + e^{2x} - x\,e^{2x}$. on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\,x\,e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - x\,e^{2x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ .Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

$f(x) = \frac{x}{2} + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) = e^{2x} - x\,e^{2x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

La droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

$f(x) - \frac{x}{2} = (1 - x)\,e^{2x}$ est du signe de $1 - x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - \frac{x}{2}$	+	0	−
	$\mathscr{C}$ est au dessus de Δ		$\mathscr{C}$ est au dessous de Δ

2° Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f ' (x).

la fonction $x \longmapsto (1 - x)\,e^{2x}$ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \longmapsto x + (1 - x)\,e^{2x}$ est la somme de deux fonctions dérivables elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

la fonction f est le produit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par une constante elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{2x} + 2\,(1 - x)\,e^{2x}) = \frac{1}{2}(1 + (-1 + 2 - 2\,x)\,e^{2x}) = \frac{1}{2}(1 + (1 - 2\,x)\,e^{2x})$$

3° Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2\,x)\,e^{2x}$. a) Etudier le sens de variation de u.

$u'(x) = -2\,e^{2x} + 2\,(1 - 2\,x)\,e^{2x} = (-2 + 2 - 4\,x)\,e^{2x} = -4\,x\,e^{2x}$

donc u '(x) est du signe de $-1 - 2\,x$ car e^{2x} est toujours positif.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de u '	+	0	−
u	↗		↘

b) Montrer que l'équation u(x) = 0 possède une solution unique α dans l'intervalle [0 , 1].

Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2\,x\,e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 1$.

- D'après les variations de la fonction u on a : $\forall\, x \in\ ]-\infty\ ; 0\,]$, $1 \leq u(x)$.

On peut donc dire que l'équation u(x) = 0 n'a pas de solution dans $]-\infty\ , 0\,]$

- u est continue sur [0 , 1], strictement décroissante sur l'intervalle [0 , 1] et $u(0) = 2 > 0$ et $u(1) = 1 - e^2 < 0$

l'équation u(x) = 0 admet donc une solution et une seule dans [0 , 1].

- D'après les variations de u on a : $\forall\, x \in [\,1 , +\infty\,[$, $u(x) \geq u(1) > 0$.

On peut donc dire que l'équation u(x) = 0 n'a pas de solution dans $[\,1 , +\infty\,[$

c) Déterminer le signe de u(x) suivant les valeurs de x.

D'après les variations de la fonction u on a : $x \leq \alpha \Leftrightarrow u(x) \geq 0$

4° Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

$f'(x) = \frac{u(x)}{2}$ est du signe de u(x) on a donc :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de f '	+	0	−
f	$-\infty$ ↗	f(α)	↘ $-\infty$

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la courbe Γ d'équation $y = e^x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = x. Les courbes Γ et $\mathscr{D}$ sont tracées sur la feuille annexe. 1° Soit t un réel ; on désigne par M_t le point de Γ d'abscisse t. La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t. Déterminer les coordonnées du point N_t.

Equation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse t : $y = e^t + e^t\,(x - t)$

Si x = 0 alors $y = e^t - t\,e^t$ et donc $N_t(0\ , e^t - t\,e^t)$

2° On désigne par P_t le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés (O ; 1), (M_t ; 1), (P_t ; 1) et (N_t ; 1). b) Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.

$O(0\ , 0)$, $N_t(0, e^t - t\,e^t)$, $M_t(t\ , e^t)$ et $P_t\,(t\ , t)$

$G_t\left(\frac{0 + 0 + t + t}{4}, \frac{0 + e^t - t\,e^t + e^t + t}{4}\right)$ c'est à dire $G_t\left(\frac{t}{2}, \frac{t + 2\,e^t - t\,e^t}{4}\right)$

3° Quel est l'ensemble des points G_t , quand t décrit $\mathbb{R}$?

$x = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 2\,x$. $G_t\left(x\ , \frac{2\,x + 2\,e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}}{4}\right)$ c'est à dire $G_t(x\ , f(x))$. quand t décrit $\mathbb{R}$ $x = \frac{t}{2}$ décrit $\mathbb{R}$ et donc G_t décrit $\mathscr{C}$

a) Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2}, puis construire, en justifiant, le point G_{-2}, sur la feuille annexe.

Soit I le milieu de $[M_{-2}P_{-2}]$ et j celui de $[ON_{-2}]$.
G_{-2} est le milieu de [IJ]