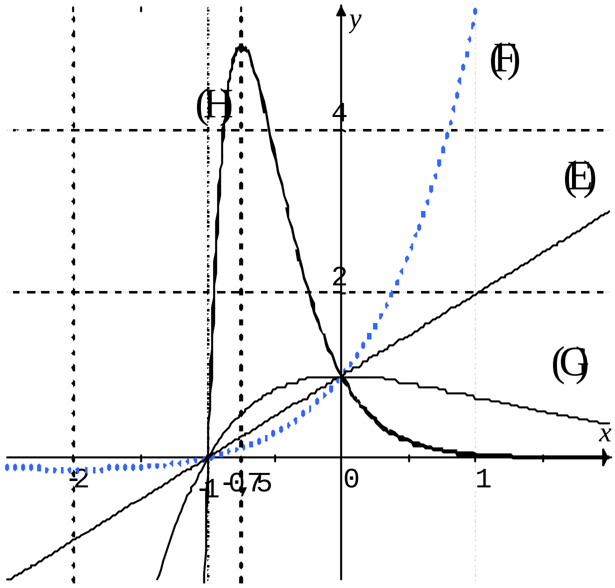


Exercice I

PARTIE A

On note f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x + 1)\,e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° Etudier le sens de variation de f.

2° Déterminer la limite de f en + ∞ et donner une interprétation graphique du résultat.

Déterminer la limite de f en – ∞.

3° Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE B

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur R par : $f_k(x) = (x + 1)e^{-kx}$

On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormal.

Lorsque k = 1, on retrouve la fonction f étudiée dans la partie A, c'est-à-dire que dans ce cas $f_1 = f$ et $(C_1) = (C)$

1° a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b) Déterminer par le calcul les points d'intersection de (C_0) et (C).

c) Vérifier que pour tout entier relatif k, la courbe (C_k) passe par ces points.

2° a)Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $(x + 1)(e^{-x} - 1)$.

b) En déduire les positions relatives de (C_k) et de (C_{k+1}).

3° On suppose que k est non nul. a) Calculer $f_k'(x)$ pour tout x réel.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f_k (distinguer les cas : k > 0 et k < 0). On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f_k.

c) On a représenté sur le graphique ci-joint quatre courbes (E), (F), (G) et (H) correspondant à quatre valeurs différentes de k. Identifier ces valeurs, en justifiant la réponse.

Exercice II

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique : 4 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b, et c telles que : a = 1 – i, b = 1 + i, c = –1 – i = – b.

On note Γ le cercle de diamètre [AB].

1° a) Placer sur une figure les points A, B, C et le cercle Γ.

b) Mettre les nombres complexes a, b et c sous forme trigonométrique.

2° Soit r la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer le point r (B), image de B par la rotation r.

b) Déterminer l'image Γ ' du cercle Γ par r ; placer Γ ' sur la figure.

3° Soit t la translation qui transforme C en O.

Démontrer que l'image du cercle Γ ' par la translation t. est le cercle Γ

Pour la suite on considère un nombre q Î [0 ; 2 p [distinct de p /2 et on note M le point d'affixe z = 1 + e^{iq}

4° On désigne par M' l'image de M par r, et on appelle z' l'affixe de M'.

a) Montrer que M est un point de Γ distinct de B .

b) Démontrer que z' = i z – 2 i. En déduire que $z' = -2 \sin \theta/2 \; e^{i\,\theta/2}$

c) Etablir la relation $z = 2 \cos \theta/2 \; e^{i\theta/2}$. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

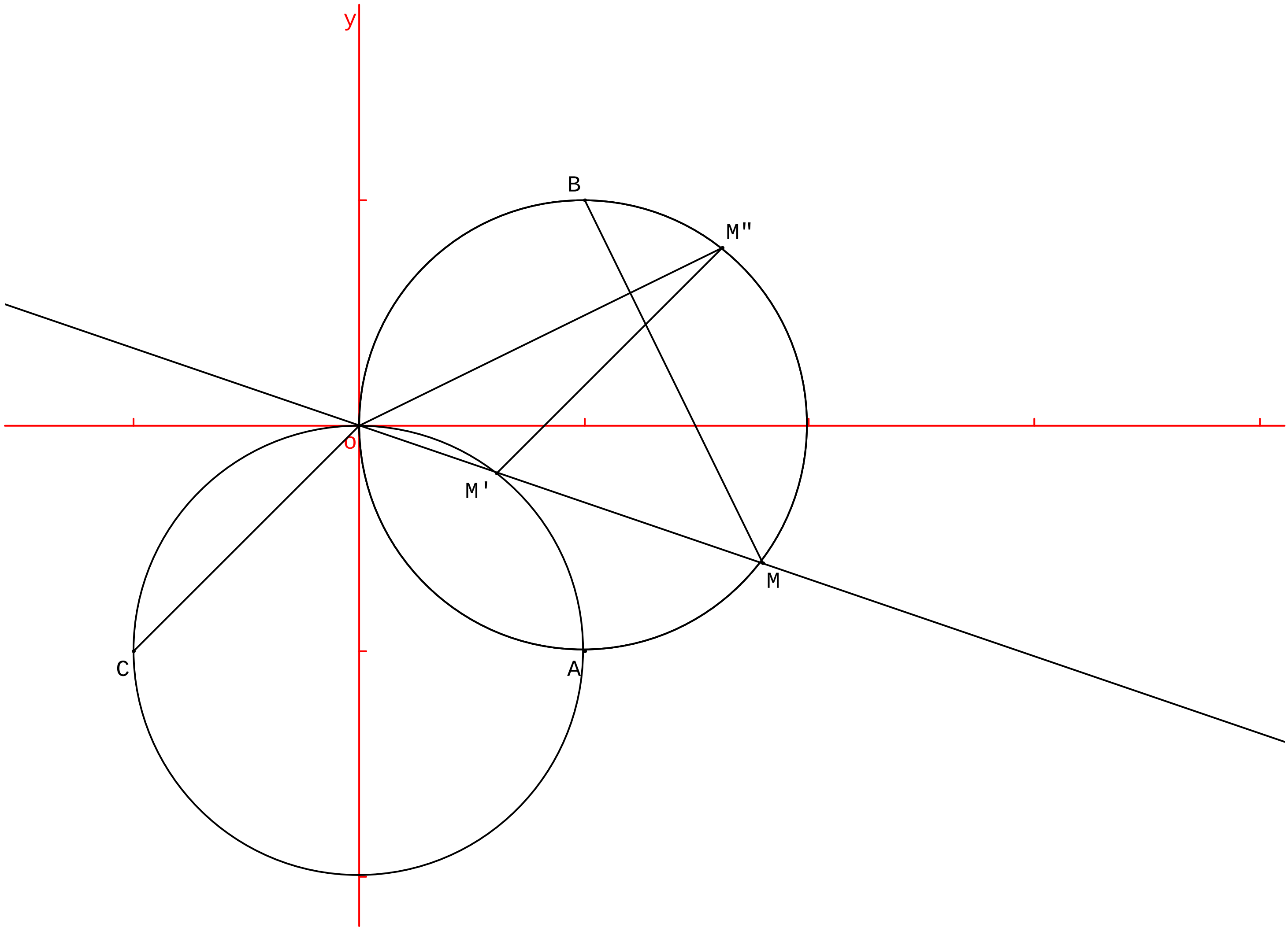
Placer sur la figure un point M et construire alors son transformé M'.

5° On désigne par M'' l'image de M' par la translation t et on appelle z'' l'affixe de M''.

a) Démontrer que $z'' = 1 + i\,e^{i\theta}$

b) Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{OM''}$

c) Etablir la relation u' = i u. Que peut-on dire des segments [BM] et [OM''] ?


y
B
M"
O
M'
M
C
A