Exercice 1

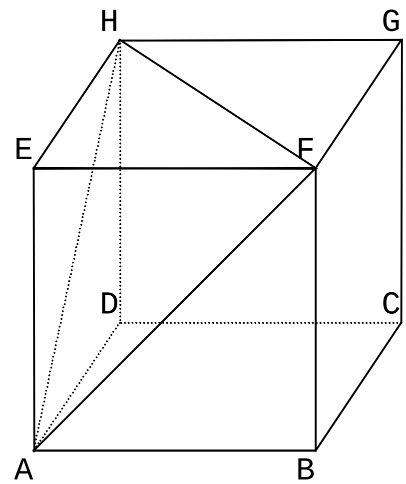
Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I donné.

a) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \ln x$ $\quad I =]\,0\,;+\infty\,[$

b) $g : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2-1}{2\,x}$ $\quad I =]\,0\,;+\infty\,[$

c) $h : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad I =]\,-1\,;+1\,[$

Exercice 2



On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif). Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1° Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants
$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$

2° En déduire que les vecteurs EC et AF sont orthogonaux.

On admettra de même que les vecteurs EC et AH sont orthogonaux.

3° En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).

4° a) Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).

b) En déduire que la droite (AF) est orthogonale à la droite (HI).

c) Etablir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).

5° Que représente le point I pour le triangle AFH ?

Le problème étudie principalement deux fonctions f et g puis met en évidence une propriété de leurs représentations graphiques.

Partie A

Soient u et v les fonctions numériques de variable réelle x définies sur R par : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1} + x$.

1° Soit x un réel. Calculer $u(x) \times v(x)$. En déduire que u(x) et v(x) sont des nombres de même signe.

2° Montrer que, pour tout x réel, u(x) et v(x) sont strictement positifs (on pourra considérer le cas où x est négatif puis le cas où x est positif).

Partie B

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur R par : $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par C la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

1° Montrer que f est impaire.

2° Déterminer la fonction dérivée f ' de f ; en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3° Déterminer les limites de f en $+\infty$.

4° Donner une équation de la droite Δ tangente à C au point O.

5° Construire C, ainsi que la droite Δ, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$..

Partie C

Soit g la fonction numérique de variable réelle x définie sur R par : $g(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

On désigne par Γ la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Etudier la parité de g.

2° Déterminer la dérivée g' de g ; en déduire le sens de variation de g.

3° Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° Déterminer la tangente à Γ au point O.

5° Construire Γ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie D

Soient M un point de coordonnées (x ; y) et N le point de coordonnées (y ; x).

Montrer que si M appartient à C alors N appartient à Γ.

Commentaire : On pourrait aussi démontrer que si M appartient à Γ, alors N appartient à C et conclure que C et Γ sont symétriques par rapport à Δ.