Devoir surveillé n°7 Mercredi 24 mars 1999

Exercice I Dans un jeu de trente-deux cartes, on distingue quatre couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle, et dans chaque couleur, huit hauteurs : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept.
On dispose les cartes en quatre paquets contentent chacun les huit cartes d'une même couleur. et on tire au hasard une carte de chaque paquet (exemple de tirage : as de pique, sept de cœur, roi de carreau, sept de trèfle).
1° a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b Calculer les probabilités que le tirage contienne
quatre cartes de même hauteur
au moins une dame ;
trois rois et un valet.
(On donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible, puis on indiquera une valeur approchée.)
2° Un tirage est gagnant lorsqu'il contient au moins deux as.
Le joueur reçoit : 1 000 F si le tirage contient les quatre as, 30 F si le tirage contient exactement trois as, 2 F si le tirage contient exactement deux as. Calculer les probabilités d'obtenir ces différents gains.
(On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible.)
(3° La réglementation des jeux de hasard indique que « les gains doivent être inversement proportionnels à leur probabilité ». Examiner si les sommes attribuées pour les tirages gagnants respectent ce principe.)

Exercice II Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles).
On admet que, dans une population donnée, les deux événements :
D « être atteint de surdité à l'oreille droite », G « être atteint de surdité à l'oreille gauche », sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05 ce que l'on note $p(D) = p(G) = 0{,}05$.
On considère les événements suivants :
B « être atteint de surdité bilatérale »
U « être atteint de surdité unilatérale »
S « être atteint de surdité (sur une oreille au moins) ».
(On donnera les valeurs numériques des probabilités sous forme décimale arrondie à 10^{-4} près.)
1° Exprimer les événements B et S à l'aide de G et de D , puis calculer les probabilités p(B) et p(S). En déduire la probabilité p(U) .
2° Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité :
a) pour qu'il soit atteint de surdité à l'oreille droite ? b) pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?
Les deux événements « D sachant que S » et « G sachant que S » sont-ils indépendants ?
3° On considère un échantillon de dix personnes prises au hasard dans la population considérée population suffisamment grande pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants).
Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucun sujet atteint de surdité dans l'échantillon.

Exercice III

Partie A Dans cette partie on cherche une solution de l'équation différentielle (E_1) « $y'' + 4y = x$ »

1° Trouver une fonction polynôme h de degré 1, solution particulière de (E_1).

2° On considère l'équation différentielle (E) « $y'' + 4y = 0$ ». Déterminer la fonction g solution de (E) vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$.

3° Déterminer une fonction f solution de l'équation (E_1) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

Partie B L'objet de cette partie est une étude précise de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) + x$ et de sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1° Etudier la parité de la fonction f. Calculer $f(x + \pi)$ en fonction de $f(x)$.

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie de représentant la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ à la partie de représentant la restriction de f à $\mathbb{R}_-$?

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de f à un intervalle [a ; b] de longueur π à la partie de $\mathscr{C}$ représentant la restriction de f à $[a+\pi ; b+\pi]$? ($k \in \mathbb{Z}$).

2° Etudier les variations de la fonction f sur $[0, \pi/2]$.

3° Sur le document ci-joint on a tracé $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. Sur le même graphique tracer $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$

4° Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$

En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

5° On appelle D_1 et D_2 les droites d'équations respectives « $y = x - 1$ » et « $y = x + 1$ ».

Déterminer les points communs à $\mathscr{C}_2$ et D_1 d'une part, à $\mathscr{C}_2$ et D_2 d'autre part.

Préciser les tangentes à $\mathscr{C}_1$ en ces points.

6° Tracer alors D_1 et D_2 puis indiquer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-3\pi/2, 3\pi/2]$.

CORRECTION

exercices de probabilité

Exercice I **Dans un jeu de trente-deux cartes, on distingue quatre couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle, et dans chaque couleur, huit hauteurs : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept. On dispose les cartes en quatre paquets contentent chacun les huit cartes d'une même couleur. et on tire au hasard une carte de chaque paquet (exemple de tirage : as de pique, sept de cœur, roi de carreau, sept de trèfle). 1° a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?**

8 choix pour la carte du premier paquet et 8 choix pour la carte du deuxième paquet et 8 choix pour la carte du troisième paquet et 8 choix pour la carte du dernier paquet : $8 \times 8 \times 8 \times 8$

b Calculer les probabilités que le tirage contienne (On donnera chaque résultat sous forme d'une fraction irréductible, puis on indiquera une valeur approchée.) quatre cartes de même hauteur

8 choix pour la hauteur : $\frac{8}{8^4} = \frac{1}{512} \approx 0{,}002$

au moins une dame ;

Passons à l'événement contraire : "ne pas avoir de dame

7 choix pour la carte du premier paquet et 7 choix pour la carte du deuxième paquet et 7 choix pour la carte du troisième paquet et 7 choix pour la carte du dernier paquet : $7 \times 7 \times 7 \times 7$

La probabilité de l'événement contraire est donc : $\frac{7^4}{8^4}$

La probabilité cherchée est donc : $1 - \frac{7^4}{8^4} = \frac{1695}{4096} \approx 0{,}414$

trois rois et un valet.

Les trois rois proviennent d'un paquet et le valet provient du dernier paquet.

$\binom{4}{3}$ choix possibles pour les paquets contenant les rois. Une fois ces paquets choisis, il n'y a plus rien à choisir

La probabilité cherchée est donc : $\frac{4}{8^4} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$

2° Un tirage est gagnant lorsqu'il contient au moins deux as. Le joueur reçoit : 1 000 F si le tirage contient les quatre as, 30 F si le tirage contient exactement trois as, 2 F si le tirage contient exactement deux as. Calculer les probabilités d'obtenir ces différents gains. (On donnera chaque résultat sous forme de fraction irréductible.)

On définit les événements suivants A : "avoir quatre as" $P(A) = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4096} \approx 0{,}00024$

B : " avoir exactement trois as " $\binom{4}{3}$ choix possibles des paquets contenant les as et 7 choix possibles des cartes tirées dans les deux autres paquets : $P(B) = \frac{4 \times 7}{8^4} = \frac{7}{1024} \approx 0{,}1426$

C : "avoir exactement deux as" $\binom{4}{2}$ choix possibles des paquets contenant les as et 7×7 choix possibles des cartes tirées dans les deux autres paquets : $P(C) = \frac{12 \times 7^2}{8^4} = \frac{147}{1024} \approx 0{,}1426$

La probabilité de gagner 1000 F est : $P(A) = \frac{1}{4096}$

La probabilité de gagner 30 F est : $P(B) = \frac{7}{1024}$

La probabilité de gagner 2 F est : $P(C) = \frac{147}{1024}$

Remarque D :"avoir exactement un as" $\binom{4}{1}$ choix possibles du paquet contenant l'as et $7 \times 7 \times 7$ choix possibles des cartes tirées dans les trois autres paquets : $P(D) = \frac{4 \times 7^3}{8^4}$

E : " ne pas avoir d'as " $7 \times 7 \times 7 \times 7$ choix possibles des cartes tirées dans les quatre paquets $P(D) = \frac{7^4}{8^4}$

3° La réglementation des jeux de hasard indique que « les gains doivent être inversement proportionnels à leur probabilité ». Examiner si les sommes attribuées pour les tirages gagnants respectent ce principe.

$\frac{1}{P(A)}$	$\frac{1}{P(B)}$
1000	30

Les gains sont inversement proportionnels si et seulement si $\frac{1}{P(A)} \times 30 = \frac{1}{P(B)} \times 1000$

$P(B) = 28\ P(A)$. Les gains sont inversement proportionnels si et seulement si $28 \times 30 = 100$ et . $28 \times 30 \neq 1000$

$P(C) = 21 \times P(B)$ et $21 \times 2 \neq 30$

$P(C) = 588 \times P(A)$ et $588 \times 2 = 1176 \neq 1000$.

La réglementation n'est pas vraiment respectée. (un seul des trois calculs suffit à le démontrer.)

Exercice II **Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles). On admet que, dans une population donnée, les deux événements :D « être atteint de surdité à l'oreille droite », G « être atteint de surdité à l'oreille gauche », sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05 ce que l'on note p(D) = p(G) = 0,05 . On considère les événements suivants : B « être atteint de surdité bilatérale » U « être atteint de surdité unilatérale » S « être atteint de surdité (sur une oreille au moins) ». (On donnera les valeurs numériques des probabilités sous forme décimale arrondie à 10– 4 près.) 1° Exprimer les événements B et S à l'aide de G et de D , puis calculer les probabilités p(B) et p(S). En déduire la probabilité p(U) .**

$B = G \cap D$ et $S = G \cup D$.

$P(B) = P(G \cap D) = P(G) \times P(D)$ car G et D sont indépendants.

$P(B) = 0,05 \times 0,05 = 0,0025$

$P(S) = P(G \cup D) = P(G) + P(D) - P(G \cap D) = 0,05 + 0,05 - 0,0025 = 0,0975$

$P(U) = P(S) - P(B) = 0,0975 - 0,0025 = 0,095$

2° Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité :

a) pour qu'il soit atteint de surdité à l'oreille droite ?

$$P_S(D) = \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{P(D)}{P(S)} = \frac{0,05}{0,0975} = \frac{500}{975} = \frac{20}{39}$$

b) pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)}{P(S)} = \frac{0,0025}{0,0975} = \frac{25}{975} = \frac{1}{39}$$

Les deux événements « D sachant que S » et « G sachant que S » sont-ils indépendants ?

$$P_S(D \cap G) = \frac{P(S \cap D \cap G)}{P(S)} = \frac{P(B)}{P(S)} = \frac{25}{975} = \frac{1}{39}$$

$$P_S(D) = P_S(G) = \frac{20}{39} \text{ donc } P_S(D) \times P_S(G) = \frac{20}{39} \times \frac{20}{39} \neq P_S(D \cap G)$$

Les événements ne sont pas indépendants.

3° On considère un échantillon de dix personnes prises au hasard dans la population considérée population suffisamment grande pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants). Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucun sujet atteint de surdité dans l'échantillon.

$P(S) = 0,0975$ donc $P(\overline{S}) = 1 - 0,0975 = 0,9025$

$P = (P(\overline{S}))^{10} = 0,9025^{10} \approx 0,3585$