$\boxed{\text{Ex I}}$ Une entreprise fabrique des appareils de précision ; la production est répartie sur quatre sites ALBEC, BECAL, CABEL et ELBAC, pour respectivement 10 % , 20 % , 25 % et 45 % de la production totale. Tous les appareils fabriqués sont testés et mis en conformité dans le site LABEC.
Suivant la provenance, les pourcentages d'appareils défectueux sont respectivement de 20 % , 15 % , 6 % et 4 % de la production de chaque site.
A , B , C et E désignent les sites, D la qualité « défectueux » et F « fonctionne ».
1° On prend au hasard l'un des appareils produit et testé.
Calculer la probabilités de l'événement $A \cap D$: «l'appareil provient du site ALBEC et est défectueux»
Calculer les probabilités des événements $B \cap D$, $C \cap D$ et $E \cap D$.
En déduire la probabilité de l'événement «l'appareil est défectueux ».
3° Ayant pris au hasard un appareil, on constate qu'il est défectueux et doit être mis en conformité.
On note P_A , P_B , P_C et P_E , les probabilités pour que l'appareil provienne respectivement des sites A , B , Cet E . Calculer les probabilités P_A et P_C.

$\boxed{\text{Ex II}}$ Sur le comptoir d'une fête foraine se trouvent six cases numérotées de 1 à 6.
Un joueur peut placer 1 F sur la case de son choix.
Le forain jette trois dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
• Si le numéro de la case apparaît sur un seul dé, le joueur gagne 2 F .
• Si le numéro apparaît sur deux des dés, le joueur gagne 3 F .
• Si le numéro apparaît sur les trois dés, le joueur gagne 5 F .
• Evidemment, si le numéro n'apparaît sur aucun des dés, le joueur perd sa mise.
On suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque face pour chacun des dés.
Calculer les probabilités pour le joueur de "gagner" (mise déduite)
a) 1 F b) 2 F; c) 4 F. d) – 1 F

$\boxed{\text{Ex III}}$ On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x\, e^x}{(1+e^x)^3}\, dx$

1° Calculer les deux intégrales : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\, dx \quad B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$.

2° Déterminer trois nombres a , b et c tels que : pour tout nombre réel t positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{b\,t}{1+t} + \frac{c\,t}{(1+t)^2}\ .$$

3° En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1) , calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\, dx$.

4° a) A l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de I.
b) En déduire la valeur de J . A l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

$\boxed{\text{Ex IV}}$ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm).

1° Etudier la fonction f et tracer $\mathscr{C}$.

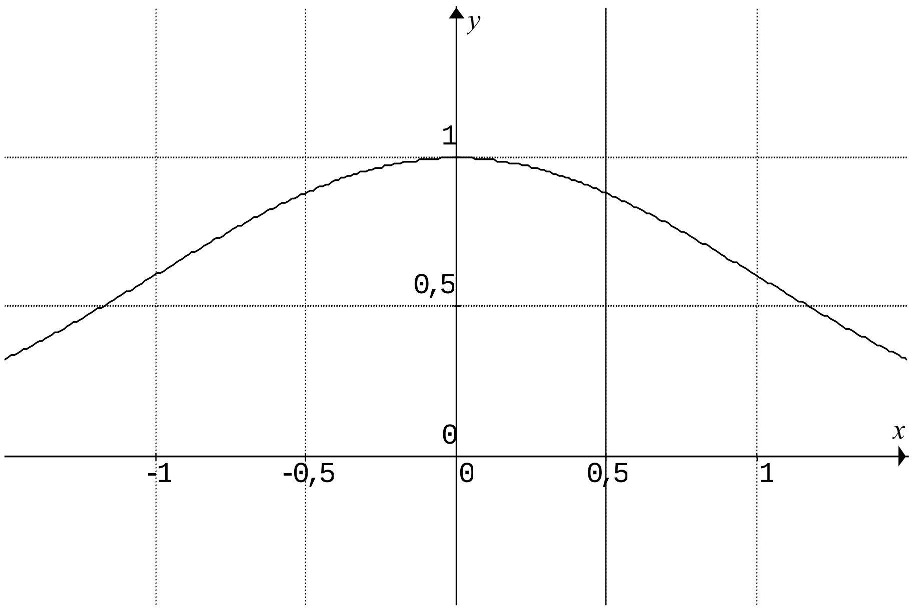
2° a) Vérifier que, pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{1}{8}, 0\right]$ on a : $e^{-\frac{1}{8}} \leq e^t \leq 1$

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{1}{8}, 0\right]$: $-t\ e^{-\frac{1}{8}} \leq 1 - e^t \leq -t$

c) En déduire que, pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 - \frac{x^2}{2} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1 - \frac{x^2}{2}\ e^{-\frac{1}{8}}$

2° On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$,l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1. .

En utilisant la question précédente, déterminer un encadrement de $\mathcal{A}$ de 5 mm^2 d'amplitude.



$\boxed{\text{Ex I}}$ Une entreprise fabrique des appareils de précision ; la production est répartie sur quatre sites ALBEC, BECAL, CABEL et ELBAC, pour respectivement 10 % , 20 % , 25 % et 45 % de la production totale. Tous les appareils fabriqués sont testés et mis en conformité dans le site LABEC. Suivant la provenance, les pourcentages d'appareils défectueux sont respectivement de 20 % , 15 % , 6 % et 4 % de la production de chaque site. A , B , C et E désignent les sites, D la qualité « défectueux » et F « fonctionne ». 1° On prend au hasard l'un des appareils produit et testé. Calculer la probabilités de l'événement $A \cap D$: «l'appareil provient du site ALBEC et est défectueux» Calculer les probabilités des événements $B \cap D$, $C \cap D$ et $E \cap D$. En déduire la probabilité de l'événement «l'appareil est défectueux ».

	A	B	C	D	
D	$0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}02$	$0{,}15 \times 0{,}2 = 0{,}03$	$0{,}06 \times 0{,}25 =$ $0{,}015$	$0{,}04 \times 0{,}45 =$ $0{,}018$	
$\overline{D}$					
	0,1	0,2	0,25	0,45	1

$p(A \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}02$
$p(B \cap D) = 0{,}15 \times 0{,}2 = 0{,}03$
$p(C \cap D) = 0{,}06 \times 0{,}25 = 0{,}015$
$p(E \cap D) = 0{,}04 \times 0{,}45 = 0{,}018$
$p(D) = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}015 + 0{,}018 = 0{,}083$p

3° Ayant pris au hasard un appareil, on constate qu'il est défectueux et doit être mis en conformité. On note P_A , P_B , P_C et P_E , les probabilités pour que l'appareil provienne respectivement des sites A , B , Cet E . Calculer les probabilités P_A et P_C.

$$P_A = P_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}083} = \frac{20}{83}$$
$$P_B = P_D(B) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}03}{0{,}083} = \frac{30}{83}$$
$$P_A = P_D(C) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}015}{0{,}083} = \frac{15}{83}$$
$$P_A = P_D(E) = \frac{p(E \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}018}{0{,}083} = \frac{18}{83}$$

$\boxed{\text{Ex II}}$ Sur le comptoir d'une fête foraine se trouvent six cases numérotées de 1 à 6.

Un joueur peut placer 1 F sur la case de son choix.
Le forain jette trois dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
- Si le numéro de la case apparaît sur un seul dé, le joueur gagne 2 F .
- Si le numéro apparaît sur deux des dés, le joueur gagne 3 F .
- Si le numéro apparaît sur les trois dés, le joueur gagne 5 F .
- Evidemment, si le numéro n'apparaît sur aucun des dés, le joueur perd sa mise.

On suppose l'équiprobabilité d'apparition de chaque face pour chacun des dés.
Calculer les probabilités pour le joueur de "gagner" (mise déduite)

a) 1 F b) 2 F; c) 4 F. d) – 1 F

a) Si le numéro de la case apparaît sur un seul dé le joueur gagne 1 F mise déduite
$$p = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$$
Si le numéro de la case apparaît sur deux des dés le joueur gagne 2 F mise déduite
$$p = \binom{3}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$$
Si le numéro de la case apparaît sur trois des dés le joueur gagne 4 F mise déduite
$$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
Si le numéro de la case n'apparaît sur aucun dé le joueur "gagne" – 1 F mise déduite
$$p = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$$

Si N représente le nombre de dés sur lequel apparaît le numéro de la case alors N suit une loi binomiale de paramètre 5, $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$

$$P(N = 0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(N = 1) = \binom{3}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(N = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6}$$

$$P(N = 3) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

Ex III **On se propose de calculer l'intégrale J = $\int_0^1 \frac{x\,ex}{(1 + ex)3}\,dx$**

1° Calculer les deux intégrales : A = $\int_0^1 \frac{ex}{1 + ex}\,dx$ B = $\int_0^1 \frac{ex}{(1 + ex)2}\,dx$.

$u(x) = 1 + e^x$ et $u'(x) = e^x$ donc $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et $A = [\ln(1 + e^x)]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2$

$\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ donc $B = \left[-\frac{1}{u(x)}\right]_0^1 = -\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{2}$

2° Déterminer trois nombres a , b et c tels que : pour tout nombre réel t positif ou nul, on ait : $\frac{1}{(1 + t)2} = a + \frac{b\,t}{1 + t} + \frac{c\,t}{(1 + t)2}$.

$$\frac{1}{(1 + t)^2} = a + \frac{b\,t}{1 + t} + \frac{c\,t}{(1 + t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1 + t)^2} = \frac{a\,(1 + t)^2}{(1 + t)^2} + \frac{b\,t\,(1 + t)}{(1 + t)^2} + \frac{c\,t}{(1 + t)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a\,(1 + t)^2 + b\,t\,(1 + t) + c\,t \Leftrightarrow 1 = a + 2\,a\,t + a\,t^2 + b\,t + b\,t^2 + c\,t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2\,a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ donc } \frac{1}{(1 + t)^2} = 1 - \frac{t}{1 + t} - \frac{t}{(1 + t)^2}$$

3° En posant t = ex dans l'égalité (1) , calculer l'intégrale I = $\int_0^1 \frac{1}{(1 + ex)2}\,dx$.

$$\frac{1}{(1 + e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \text{ et } I = \int_0^1 dt - A - B = 1 - \ln(1 + e) + \ln 2 + \frac{1}{1 + e} - \frac{1}{2}$$

$$-\ln(1 + e) + \ln 2 + \frac{1}{1 + e} + \frac{1}{2}$$

4° a) A l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de I.

$$J = \int_0^1 \frac{x\,e^x}{(1 + e^x)^3}\,dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^3} \text{ et } v(x) = \frac{(1 + e^x)^{-3+1}}{-1 + 3} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + e^x)^2} \end{cases}$$

$$J = \left[-\frac{x}{2} \times \frac{1}{(1 + e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2} \times I$$

b) En déduire la valeur de J . A l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de J à 10–2 près.

$$J = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + e)^2} + \frac{1}{2} \times \left(-\ln(1 + e) + \ln 2 + \frac{1}{1 + e} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\,(1 + e)^2)} - \frac{\ln(1 + e)}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2\,(1 + e)} + \frac{1}{4}$$

$J \approx 0{,}04$.

Ex IV **Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) =** $e^{-\frac{x^2}{2}}$ **et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm). 1° Etudier la fonction f et tracer C .**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-2x}{2} \times e^{-\frac{x^2}{2}} = -\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2} < 0$

f est paire

x	0	$+\infty$
signe de f '		
f	1 $\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2° a) Vérifier que, pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{1}{8}, 0\right]$ on a : $e^{-\frac{1}{8}} \le e^t \le 1$

$-\dfrac{1}{8} \le t \le 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{8}} \le e^t \le 1$ car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{1}{8}, 0\right]$: $-t\, e^{-\frac{1}{8}} \le 1 - e^t \le -t$

le théorème des accroissement finis n'est plus au programme. On peut toutefois retrouver l'encadrement demandé en étudiant les variations de deux fonctions.

$g(t) = 1 - e^t + t\, e^{-1/8}$ et $g'(t) = -e^t + e^{-1/8} < 0$ donc g est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$

$g(0) = 0$ donc pour tout réel t de $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$, $g(t) \ge 0$ donc $1 - e^t \ge -t\, e^{-1/8}$

$h(t) = 1 - e^t + t$ et $h'(t) = -e^t + 1 \ge 0$ donc h est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$

$h(0) = 0$ donc pour tout réel t de $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$, $1 - e^t \le -t$.

c) En déduire que, pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 - \dfrac{x^2}{2} \le e^{-\frac{x^2}{2}} \le 1 - \dfrac{x^2}{2}\, e^{-\frac{1}{8}}$

pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$: $-t\, e^{-\frac{1}{8}} \le 1 - e^t \le -t$

On pose $t = \dfrac{x^2}{2}$ on a alors pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ $1 - \dfrac{x^2}{2} \le e^{-\frac{x^2}{2}} \le 1 - \dfrac{x^2}{2}\, e^{-\frac{1}{8}}$

2° On note .A l'aire, exprimée en cm2, de la partie du plan limitée par la courbe C ,l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1. .En utilisant la question précédente, déterminer un encadrement de ,A de 5 mm2 d'amplitude.

sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{8}, 0\right]$ f est positive donc A est égale à $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \times 16\ \text{cm}^2$.

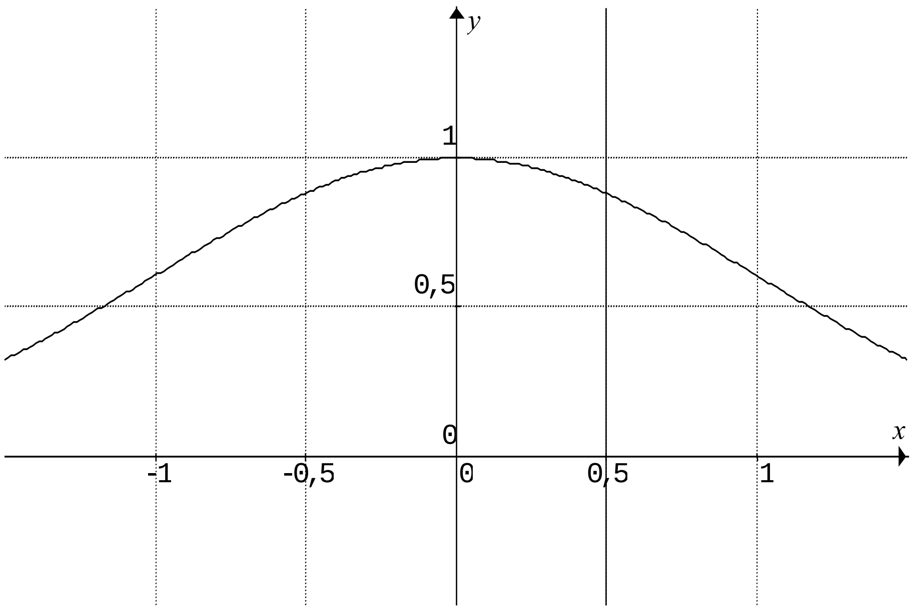
En intégrant les inégalités obtenues on obtient

$$\int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx \le \frac{A}{16} \le \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2} \times e^{-1/8}\right) dx$$

donc $16 \times \left[x - \dfrac{x^3}{6}\right]_0^{1/2} \le A \le 16 \times \left[x - \dfrac{x^3}{6} \times e^{-1/8}\right]_0^{1/2}$ donc $16\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{48}\right) \le A \le 16\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{-1/8}}{48}\right)$

$7{,}66 \le A \le 7{,}71$

$7{,}71 - 7{,}66 = 0{,}05$.


y
1
0,5
0
x
-1
-0,5
0
0,5
1