Exercice I Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
On note P(E) la probabilité d'un événement E et P(E/F) la probabilité conditionnelle de E sachant F
Un client téléphone à l'artisan.
On note :
R l'événement « le client obtient le répondeur »
A l'événement « l'artisan est présent »
$\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1° Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles P(R/A) et P(R/ $\overline{A}$) .

2° a) Exprimer P(R) en fonction de P(R/A), P(R/ $\overline{A}$) et P(A),

b) En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}$ P(A)+ 1 et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

3° Un client téléphone ; il obtient le répondeur.
Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

Exercice II Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que

- s'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n + 1)^{\text{ième}}$] est 0,8 ;
- s'il a laissé passer le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6
- la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note P(E) la probabilité de E, $\overline{E}$ l'événement contraire de E. On note P(E/F) la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant que F est réalisé.
A_n est l'événement « le gardien arrête le $n^{\text{ème}}$ tir ». On a donc $P(A_1) = 0,7$. '

1° a) Donner, pour n > 1 , les valeurs de $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

b) Exprimer $P(A_{n+1} \cap An)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{An})$ en fonction de $P(A_n)$.

c) En déduire que, pour tout entier strictement positif $n \geq 1$, on a : $P(A_{n+1}) = 0,2\, P(A_n) + 0,6$.
2° On pose à présent, pour $n \geq 1$, $p_n = P(A_n)$ et $U_n = p_n - 0,75$.
a) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
c) Montrer que (p_n) admet une limite que l'on calculera.

Exercice III On pose pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$
où ln désigne la fonction logarithme népérien, et: $I_0 = \int_1^e x^2 \, dx$.

1° Calculer I_0 .
2° En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .
3° En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$3\, I_{n+1} + (n + 1)\, I_n = e^3. \qquad (1)$$

En déduire I_2 .
4° a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.
b) Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$
c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice I **Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur. Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois. Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan. On note P(E) la probabilité d'un événement E et P(E/F) la probabilité conditionnelle de E sachant F Un client téléphone à l'artisan. On note : R l'événement « le client obtient le répondeur » A l'événement « l'artisan est présent » $\overline{A}$ l'événement contraire de A.**

1° Déterminer la probabilité P(R), ainsi que les probabilités conditionnelles P(R/A) et P(R/ $\overline{A}$).

Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur $P(R) = \frac{4}{5}$

Quand il est présent, l'arisant branche le répondeur une fois sur trois : $P(R/A) = P_A(R) = \frac{1}{3}$

Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. $P(R/\overline{A}) = P_{\overline{A}}(R) = 1$

2° a) Exprimer P(R) en fonction de P(R/A), P(R/ $\overline{A}$) et P(A).

$P(R) = P(A \cap R) + P(R \cap \overline{A}) = P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = P(A) \times P_A(R) + (1 - P(A)) \times P_{\overline{A}}(R)$

b) En déduire l'égalité $\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.

$P(R) = \frac{4}{5} = P(A) \times P_A(R) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = P(A) \times \frac{1}{3} + (1 - P(A)) \times 1 = 1 - \frac{2}{3}P(A)$

$\frac{4}{5} = -\frac{2}{3}P(A) + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}P(A) = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{10}$

3° Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{3/10}{4/5} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{8}$

Exercice II **Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que s'il a arrêté le nième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le (n + 1)ième] est 0,8 ; s'il a laissé passer le nième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7. Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note P(E) la probabilité de E, $\overline{E}$ l'événement contraire de E. On note P(E/F) la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant que F est réalisé. An est l'événement « le gardien arrête le nème tir ». On a donc P(A1) = 0,7. 1° a) Donner, pour n > 1 , les valeurs de P(An+1/An) et P(An+1/ $\overline{An}$).**

s'il a arrêté le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n + 1)^{\text{ième}}$] est 0,8 donc $P(A_{n+1}/A_n) = 0,8$

s'il a laissé passer le $n^{\text{ième}}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 donc $P(A_{n+1}/\overline{A_n}) = 0,6$

b) Exprimer P(An+1 ∩ An) et P(An+1 ∩ $\overline{An}$) en fonction de P(An).

$P(A_{n+1} \cap An) = P(An) \times P(A_{n+1}/A_n) = 0,8\ P(A_n)$

$P(A_{n+1} \cap \overline{An}) = P(A_n) \times$ donc $P(A_{n+1}/\overline{A_n}) = 0,6\ P(\overline{A_n}) = 0,6\ (1 - P(A_n))$

c) En déduire que, pour tout entier strictement positif n ≥ 1 , on a : P(An+1) = 0,2 P(An) + 0,6.

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap An) + P(A_{n+1} \cap \overline{An}) = 0,8\ P(A_n) + = 0,6\ (1 - P(A_n)) = 0,2\ P(A_n) + 0,6.$

2° On pose à présent, pour n ≥ 1 , pn = P(An) et Un = pn – 0,75.a) Démontrer que (Un) est une suite géométrique de raison 0,2.

$U_{n+1} = p_{n+1} - 0,75 = 0,2\ p_n + 0,6 - 0,75 = 0,2\ p_n - 0,15$

$U_n = p_n - 0,75$ donc $p_n = U_n + 0,75$ et $U_{n+1} = 0,2\ (U_n + 0,75) - 0,15 = 0,2\ U_n + 0,15 - 0,15 = 0,2\ U_n$

b) En déduire une expression de pn en fonction de n.

$U_n = U_1 \times 0,2^{n-1}$ avec $U_1 = p_1 - 0,75 = 0,7 - 0,75 = 0,05$

$p_n - 0,75 = 0,05 \times 0,2^{n-1}$ donc $p_n = 0,75 + 0,05 \times 0,2^{n-1}$

c) Montrer que (pn) admet une limite que l'on calculera.

$|\ 0,2\ | < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,75.$

Exercice III **On pose pour tout entier naturel n non nul : In = $\int_1^e x2\ (\ln x)^n\,dx$ où ln désigne la fonction logarithme népérien, et: I0 = $\int_1^e x2\,dx$. 1° Calculer I0 .**

$I_0 = \int_1^e x^2 (\ln x)^0\,dx = \int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}$

2° En utilisant une intégration par parties, calculer I1 .

$I_1 = \int_1^e x^2 (\ln x)^1\,dx$

$\begin{cases} u(x) = \ln x \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$ donc $I_1 = \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{2\,e^3}{9} + \frac{1}{9}$

3° En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul 3 In+1 + (n + 1) In = e3.(1) En déduire I2 .

$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \text{ et } u'(x) = \dfrac{1}{x} \times (n+1) \times (\ln x)^n \\ v'(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$ $I_{n+1} = \left[(\ln x)^{n+1} \times \frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times (n+1) \times (\ln x)^n \times \frac{x^3}{3}\,dx =$

$\frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} \times I_n$ donc $3\,I_{n+1} = e^3 - (n+1)\,I_n$ donc $3\,I_{n+1} + (n+1)\,I_n = e^3$

$3\,I_2 + 2\,I1 = e^3$ donc $I_2 = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} I_1 = \frac{e^3}{3} - \frac{4\,e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5\,e^3}{27} - \frac{2}{27} - \frac{1}{9}$

4° a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, In est positive.

pour tout réel x de [1 ; e], $\ln x \geq 0$ donc $x^2 (\ln x)^n \geq 0$ donc $\int_1^e x^2 (\ln x)^n\,dx \geq 0$

b) Déduire de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul, In ≤ $\frac{e3}{n+1}$

$3\,I_{n+1} + (n+1)\,I_n \geq (n+1)\,I_n$ donc $(n+1)\,I_n \leq e^3$ donc $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ $\quad (n+1 < 0)$

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty}$ In.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$ et $0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$