$\boxed{1}$ On considère un triangle ABC du plan et on désigne par I, J, K, L les points définis par

I est le barycentre de { (A, 1) ; (B, 1) ; (C, – 1) }
J est le barycentre de { (A, 1) ; (B, – 2) ; (C, 2) }
K est le barycentre de { (A, 1) ; (B, 1) ; (C, 2) }
L est le barycentre de { (A, – 2) ; (B, 1) ; (C, 2) }
1° Déterminer et construire les points I, J, K, L.
2° a) Montrer que les points A, I, J sont alignés et que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).
b) Montrer de même que les points B, I, L sont alignés et que la droite (IL) est parallèle à la droite (AC)
3° Montrer que les points A, K, L sont alignés ; ainsi que les points B, K, J d'une part et C, K, I d'autre part.
4° Que représente C pour le triangle IJL ?

$\boxed{2}$ On considère dans un plan (P) un triangle ABC . B' désigne le milieu de [AC] , C' le milieu de [AB] , A' le milieu de [BC] et D le barycentre du système {(A ; 3), (B ; 2)}.
1° a) Construire le point D
b)Déterminer le point K intersection des droites (B'C') et (CD) .
On montrera que K est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.
2° Soit E le barycentre du système {(B ; 2), (C ; 1)}.
Montrer que le point E est le point d'intersection des droites (AK) et (BC) et préciser la positon de E sur la droite (AK) .
3° B et C restent fixes et le point A décrit un cercle de centre E et de rayon r .
Déterminer et construire les lieux géométriques des points K et D. (On pourra faire intervenir des homothéties).

$\boxed{3}$ Soit ABC un triangle. On note I le barycentre du système {(A, 2) ; (C, 1)} ; J le barycentre de {(A, 1) ; (B, 2)} et K le barycentre du système {(B, – 4) ; (C, 1)}.
1° a) Montrer que K est le barycentre du système {(A, 2) ; (C, 1) ; (A, – 2) ; (B, – 4)}.
b) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.
2°On note A', B', C' les milieux respectifs des segments [AK], [BI], [CJ]
a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
b) Montrer que les points A', B', C' sont alignés et préciser la position de B' sur le segment [A'C'].

$\boxed{4}$ Soit un quadrilatère ABCD.

1° Placer les barycentres : E barycentre de (A, 4);(B, 1);(C, – 3),
F le barycentre de (B, – 1) ; (C, 3) ; (D, 2) et
G barycentre du système (D,–2);(A,4);(B,1).
2° Démontrer que quel que soit le point M du plan P, le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = 4\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD}$ est constant.
En déduire que les droites (DE), (AF) et (CG) sont parallèles.
3° On suppose que les droites (AD) et (EF) sont sécantes en un point noté I, que les droites (AC) et (FG) sont sécantes en un point J et que les droites (CD) et (EG) sont sécantes en un point noté K.
Calculer les nombres réels α, β, γ tels que : $\overrightarrow{IA} = \alpha\ \overrightarrow{ID}$ $\overrightarrow{JC} = \beta\ \overrightarrow{JA}$ $\overrightarrow{KD} = \gamma\,\overrightarrow{KC}$
4° Démontrer que les points I, J et K sont alignés

$\boxed{5}$ Soit un tétraèdre ABCD et E, F, I les points définis par : E est le barycentre du système (B, 4), (D, −1), F est le barycentre du système (A, 2), (C, 1) et I le milieu de [EF].
1°a) Déterminer et construire les points E, F et I.
b) Montrer que I est le barycentre du système (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) où a, b, c, d sont des réels que l'on déterminera.
2° On désigne par K le barycentre du système (A, 1), (B, 2)}. Montrer que les droites (IK) et (CD) sont parallèles.
3° Soit k un réel quelconque.
On considère les points M, N, P définis par : $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = -\,k\ \overrightarrow{BD}$ et P le milieu de [MN].
a) Montrer que P est le barycentre du système (A, 1 – k), (B, 1 + k), (C, k), (D, – k).
b) Montrer que lorsque k décrit $\mathbb{R}$, P décrit une droite que l'on précisera.
4° On se place dans le plan (EFK). Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points Q du plan (EFK) tels que :
$\| 2\,\overrightarrow{QA} + 4\,\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\| = \|-2\,\overrightarrow{QA} + 4\,\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\|$.
Vérifier que E et F sont des points de $\mathscr{C}$.

3 Soit ABC un triangle. On note I le barycentre du système {(A,2) ; (C,1)} ; J le barycentre de {(A,1) ; (B,2)} et K le barycentre du système {(B, – 4) ; (C, 1)}. 1° a) Montrer que K est le barycentre du système {(A, 2) ; (C, 1) ; (A, – 2) ; (B, – 4)}.

K bary	B	C
	– 4	1

donc $-4\,\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ donc $2\,\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} - 2\,\overrightarrow{KA} - 4\,\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} - 4\,\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

donc

G bary	A	C	A	B
	2	1	– 2	– 4

b) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

On sait que

K bary	A	C	A	B
	2	1	– 2	– 4

par assoiciativité on a

I bary	A	C
	2	1

et

J bary	A	B
	$1 \times (-2)$	$2 \times (-2)$

donc

K bary	I	J
	$2 + 1$	$-2-4$

donc K, I et J sont alignés

2°On note A', B', C' les milieux respectifs des segments [AK], [BI], [CJ]
a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

A' est le milieu de [AK] donc $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$

K bary	B	C
	– 4	1

donc $-3\,\overrightarrow{AK} = -4\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

B' est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$

I bary	A	C
	2	1

donc $3\,\overrightarrow{BI} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{6}(3\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C' est le milieu de [CJ] donc $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CJ}$

J bary	A	B
	1	2

donc $3\,\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{6}(3\,\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Montrer que les points A', B', C' sont alignés et préciser la position de B' sur le segment [A'C'].

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$2\,\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ donc A', B' et C' sont alignés et B' est au milieu de [A'B'].

$\boxed{5}$ Soit un tétraèdre ABCD et E, F, I les points définis par : E est le barycentre du système (B, 4), (D, –1), F est le barycentre du système (A, 2), (C, 1) et I le milieu de [EF]. 1°a) Déterminer et construire les points E, F et I.

E bary	B	D
	4	– 1
F bary	A	C
	2	1

$\overrightarrow{BE} = \dfrac{-1}{4-1}\,\overrightarrow{BD} = -\dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2+1}\,\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que I est le barycentre du système (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) où a, b, c, d sont des réels que l'on déterminera.

I bary	E	F
	3	3

donc 3 $\overrightarrow{IE} + 3\ \overrightarrow{IF} = \vec{0}$

E bary	B	D
	4	– 1

donc 3 $\overrightarrow{IE} = 4\ \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}$ et

F bary	A	C
	2	1

donc 3 $\overrightarrow{IF} = 2\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$

on a donc $4\ \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID} + 2\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ donc

I bary	A	B	C	D
	2	4	1	– 1

2° On désigne par K le barycentre du système (A, 1), (B, 2)}. Montrer que les droites (IK) et (CD) sont parallèles.

K bary	A	B
	1	3

et

I bary	A	B	C	D
	2	4	1	– 1

donc par associativité on a :

K bary	I	C	D
	2 + 4	1	– 1

donc $6\ \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ donc $6\ \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (CD) et 5KI) sont parallèles

3° Soit k un réel quelconque. On considère les points M, N, P définis par : $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = -k\ \overrightarrow{BD}$ et P le milieu de [MN].
a) Montrer que P est le barycentre du système (A, 1 – k), (B, 1 + k), (C, k), (D, – k).

M est le milieu de [MN] donc $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PB} - k\,\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PA} + k\,\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PB} - k\ \overrightarrow{BP} - k\ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{AP} + k\ \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PB} + k\ \overrightarrow{PB} - k\ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - k\ \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$\Rightarrow (1-k)\ \overrightarrow{PA} + (1+k)\ \overrightarrow{PB} + k\ \overrightarrow{PC} - k\ \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

donc

P bary	A	B	C	D
	1 – k	1 + k	k	– k

b) Montrer que lorsque k décrit $\mathbb{R}$, P décrit une droite que l'on précisera.

$\overrightarrow{PB} + k\ \overrightarrow{PB} - k\ \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - k\ \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Rightarrow$

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{CB} + k\ \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA} + k\ \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow (1+k)\ \overrightarrow{AB} = -2\ \overrightarrow{PA}$

On a donc $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1+k}{2}\,\overrightarrow{AB}$

Quand k décrit $\mathbb{R}$, $\dfrac{1+k}{2}$ décrit $\mathbb{R}$ et P décrit la droite (AB)

4° On se place dans le plan (EFK). Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points Q du plan (EFK) tels que :
$\|2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\| = \|-2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\|$. Vérifier que E et F sont des points de $\mathscr{E}$.

I bary	A	B	C	D
	2	4	1	– 1

donc $2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD} = (2+4+1-1)\ \overrightarrow{QI} = 6\ \overrightarrow{QI}$

$-2+4-1-1 = 0$ donc le vecteur $-2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}$ est indépendant du point Q. On le note $\vec{V}$

$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \|2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\| = \|-2\ \overrightarrow{QA} + 4\ \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD}\| \Leftrightarrow \|6\ \overrightarrow{QI}\| = \|\vec{V}\|$

$\Leftrightarrow QI = \dfrac{\|\vec{V}\|}{6}$. $\mathscr{E}$ est donc la sphère de centre I de rayon $\dfrac{\|\vec{V}\|}{6}$

E bary	B	D
	4	– 1

donc $2\ \overrightarrow{EA} + 4\ \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = 2\ \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}$

et $-2\ \overrightarrow{EA} + 4\ \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = -2\ \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EC}$

donc $\|2\ \overrightarrow{EA} + 4\ \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}\| = \|2\ \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\| = \|\overrightarrow{EA} + 4\ \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}\|$ donc E appartient è $\mathscr{E}$

F bary	A	C
	2	1

donc $2\ \overrightarrow{FA} + 4\ \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD} = 4\ \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FD}$

et $-2\ \overrightarrow{FA} + 4\ \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD} = 4\ \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FD}$

donc $\|2\ \overrightarrow{FA} + 4\ \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD}\| = \|4\ \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FD}\| = \|-2\ \overrightarrow{FA} + 4\ \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD}\|$ donc F appartient à $\mathscr{E}$