$\boxed{1}$ Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4 .

On prendra le centimètre pour unité.
1° En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A;2); (B;1); (C;1)} .
2° On désigne par M un point quelconque de $\mathscr{P}$.
a) Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : $\| 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \vec{v} \|$
3° On considère le système de points pondérés (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) où n est un entier naturel fixé.
a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. glacer G_0, G_1, G_2 .
b) Montrer que le point G_n appartient au segment [AH] .
c) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers + ∞.
Préciser la position de G_n quand n tend vers + ∞ .
d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\| 2\,\overrightarrow{MA} + n\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC} \| = n \| \vec{v} \|$
Montrer que E_n est un cercle qui passe parle point A. En préciser le centre et le rayon, noté R_n .
e) Construire E_2.

$\boxed{2}$ Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle [– 1 ; 1].

On note G_k le barycentre du système {(A, $k^2 + 1$), (B, k), (C, – k)}.
1° Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.
2° a) Montrer que pour tout réel k de l'intervalle [– 1 ; 1], , on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_k} = -\dfrac{k}{k^2+1}\,\overrightarrow{BC}$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur [– 1 ; 1] par $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$

c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [– 1 ; 1].
Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3° Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace tels que
$\| 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$
4° Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que
$\| 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$
5° L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$)
Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (0; 0 ; 2), (– 1 ; 2 ; 1) et (– 1 ; 2 ; 5).
Le point G_k et les ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$sont définis comme ci-dessus.
a) Calculer les coordonnées de G_1 et de G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.
b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

$\boxed{3}$ A et B sont deux points de l'espace et G est le barycentre du système {(A ; 1) ; (B ; 2)} .

$\mathscr{P}$ est un plan ne contenant ni A, ni B, et H est le projeté orthogonal de G sur $\mathscr{P}$.
1° Démontrer que, pour tout point M de l'espace : $MA^2 + 2\,MB^2 = 3\,MG^2 + 3\,AB^2$.
2° a) Déterminer la valeur minimale de la somme $MA^2 + 2\,MB^2$ lorsque M décrit l'espace.
b) Déterminer la valeur minimale de la somme $MA^2 + 2\,MB^2$ lorsque M décrit le plan $\mathscr{P}$.
3° Dans cette question, on considère AB = 6 .
a) Reprendre la question 2°.
b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que. $MA^2 + 2\,MB^2 = 36$,
puis l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ vérifiant la même égalité.

$\boxed{4}$ On donne un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 et AC = 4. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

1° a) Pour tout m≠0,on désigne par G_m le barycentre du système {(A, m – 1) ; (B, 1) ; (C, m)}.
Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points G_m obtenus lorsque $m \in \mathbb{R}^*$.
b) Construire le barycentre du système {(A, 3) ; (B, – 1) ; (C, 2)}
2° Calculer GA^2, GB^2, GC^2
3° a) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $3\,MA^2 - MB^2 + 2\,MC^2 = -96$
b) Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points M du plan tels que $3\,MA^2 - MB^2 + 2\,MC^2 = 36$
d) Déterminer et construire l'ensemble E_4 des points M du plan tels que : $\|3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
4° On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' barycentre du système {(A ; 4) , (B ; –3) , (C ; 1) , (M ;8)}.
a) Monter que f admet un point fixe et un seul Ω et que Ω est un point de E_1. Construire Ω.
b) Montrer que f est une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.
c) Montrer que l'image par f de l'ensemble E_3 est l'ensemble E_4.

Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4 . On prendra le centimètre pour unité. 1° En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés {(A;2); (B;1); (C;1)} .

G	A	B	C
barycentre	2	1	1

Par associativité comme H est le milieu de [BC] on peut dire que :

G	A	H
barycentre	2	1 + 1

G est le milieu de [AH]

2° On désigne par M un point quelconque de $\mathscr{P}$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.

$\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{HA}$ et $\|\vec{v}\| = 2 \times AH = 8$

b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{v}\|$

$M \in E \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = 8 \Leftrightarrow MG = 2 \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}(G, 2)$

3° On considère le système de points pondérés (A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n) où n est un entier naturel fixé.

a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. glacer G_0, G_1, G_2 .

G_n existe si et seulement si $2 + n + n \neq 0$ ce qui est le cas quand n est un entier naturel.

b) Montrer que le point G_n appartient au segment [AH] .

G_n	A	B	C
barycentre	2	n	n

Par associativité comme H est le milieu de [BC] on peut dire que :

G_n	A	H
barycentre	2	n + n

Comme 2 et 2 n ont le mêm signe on peut dire que G appartient au segment [AH]

c) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers + ∞.
Préciser la position de G_n quand n tend vers + ∞ .

$(2 + 2n)\overrightarrow{AG_n} = 2\overrightarrow{AA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = n\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = 2n\overrightarrow{AH}$

$AG_n = \dfrac{2n \times AH}{2 + 2n} = \dfrac{8n}{2 + 2n} = \dfrac{4n}{1 + n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} AG_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n}{1 + n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n}{n} = 4.$

De plus Gn appartient [AH] donc la position de G_n quand n tend vers + ∞ est donc le point H.

d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{v}\|$
Montrer que E_n est un cercle qui passe parle point A. En préciser le centre et le rayon, noté R_n .

$M \in E_n \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|(2 + n + n)\overrightarrow{MG_n}\| = 8n \Leftrightarrow MG_n = \dfrac{8n}{2 + 2n}$

M est donc sur un cercle de centre G_n de rayon $R_n = \dfrac{4n}{1 + n}$

$\|2\overrightarrow{AA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}\| = \|2n\overrightarrow{AH}\| = 2 \times n \times 4 = n\|\vec{v}\|$ donc a appartient à E_n

e) Construire E_2.

E_2 est le cercle de centre G_2 passant par A de rayon $R_2 = \dfrac{8}{3}$

$\boxed{3}$ A et B sont deux points de l'espace et G est le barycentre du système {(A ; 1) ; (B ; 2)} . $\mathscr{P}$ est un plan ne contenant ni A, ni B, et H est le projeté orthogonal de G sur $\mathscr{P}$. 1° Démontrer que, pour tout point M de l'espace : $MA^2 + 2\ MB^2 = 3\ MG^2 + 3\ AB^2$.

$MA^2 + 2\ MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\ \overrightarrow{MB}^2 = (\ \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\ \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 2\ (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot\ (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$= MG^2 + GA^2 + 2\ \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 2\ MG^2 + 2\ GB^2 + 2 \times 2\ \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} = GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ MG^2 + \overrightarrow{MG} \cdot (2\ \overrightarrow{GA} + 4\ \overrightarrow{GB})$

$= GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ MG^2$

2° a) Déterminer la valeur minimale de la somme $MA^2 + 2\ MB^2$ lorsque M décrit l'espace.

$GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ MG^2 \geq GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ GG^2$ donc la valeur minimale de $MA^2 + 2\ MB^2$ est $GA^2 + 2\ GB^2$

b) Déterminer la valeur minimale de la somme $MA^2 + 2\ MB^2$ lorsque M décrit le plan $\mathscr{P}$.

MG^2 est minimal quand M = H on a donc

Pour tout point M de $\mathscr{P}$ on a : $GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ MG^2 \geq GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ HG^2$

Donc pour tout point M de $\mathscr{P}$ on a : $MA^2 + 2\ MB^2 \geq HA^2 + 2\ HB^2$

3° Dans cette question, on considère AB = 6 . a) Reprendre la question 2°.

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$ donc $AG = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ et $BG = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ donc $GA^2 + 2\ GB^2 = 16 + 4 = 20$.

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que. $MA^2 + 2\ MB^2 = 36$,

$MA^2 + 2\ MB^2 = 36 \Leftrightarrow GA^2 + 2\ GB^2 + 3\ MG^2 = 36 \Leftrightarrow 16 + 4 + 3\ MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{16}{3}} \Leftrightarrow MG = 4\ \frac{\sqrt{3}}{3}$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 + 2\ MB^2 = 36$ est donc la sphère de centre G de rayon $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

puis l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ vérifiant la même égalité.

Si $MH > \frac{4\sqrt{3}}{3}$ alors cet ensemble est vide.

Si $MH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ alors cet ensemble est réuit au point H

Si $MH < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ alors cet ensemble est un cercle de centre H de rayon r

Si M est un point tel que $MA^2 + 2\ MB^2 = 36$ alors dans MGH rectangle en H on a :

$MG^2 = GH^2 + HM^2 \Leftrightarrow HM^2 = \frac{16}{3} - GH^2$ et donc le rayon du cercle est : $r = MH = \sqrt{\frac{16}{3} - GH^2}$

$\boxed{4}$ **On donne un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 et AC = 4. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. 1° a) Pour tout m≠0,on désigne par G_m le barycentre du système {(A, m – 1); (B, 1) ; (C, m)}.**
Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points G_m obtenus lorsque $m \in \mathbb{R}^*$.

$(m-1+1+m)\,\overrightarrow{BG_m} = (m-1)\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + m\,\overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + m\,\overrightarrow{BC} = m\,\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BG_m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} + \frac{1}{2\,m}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2\,m}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,m}\right)\overrightarrow{BA}$

Quand m décrit $\mathbb{R}^*$ alors $\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,m}$ décrit $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ alors G_m décrit lma droite (AB) privée du milieu de [BC']

b) Construire le barycentre du système {(A, 3) ; (B, – 1) ; (C, 2)}

$G_{-2} = G$	A	B	C
barycentre	– 3	– 1	– 2

par associativité on obtient

I	A	B
barycentre	3	– 1

⇒

G	I	C	C
barycentre	2	2	2

2° Calculer GA^2, GB^2, GC^2

3° a) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $3\,MA^2 - MB^2 + 2\,MC^2 = -96$
b) Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points M du plan tels que $3\,MA^2 - MB^2 + 2\,MC^2 = 36$
d) Déterminer et construire l'ensemble E_4 des points M du plan tels que : $\|3\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.
4° On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' barycentre du système {(A ; 4) , (B ; –3) , (C ; 1) , (M ;8)}.
a) Monter que f admet un point fixe et un seul Ω et que Ω est un point de E_1. Construire Ω.
b) Montrer que f est une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques.
c) Montrer que l'image par f de l'ensemble E_3 est l'ensemble E_4.