PRODUIT SCALAIRE

I PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

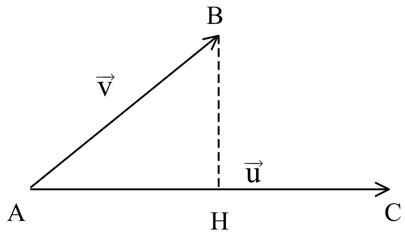
1° Expression du produit scalaire

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ On a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y'$



2° Propriétés

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$ $\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

3° dans un triangle

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}$

4° Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\qquad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x\,x' + y\,y' = 0$

5° Distances

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ $\quad AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

6° Vecteur normal à une droite Equation de droite .

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est dit normal à une droite $\mathscr{D}$ si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur directeur de la droite.

Equation de droite : si $\mathscr{D}$ est la droite passant par A (x_A, y_A) de vecteur normal $\vec{n}\,(a,b)$

$a\,x + b\,y = a\,x_A + b\,y_A$

7° Equation d'un cercle .

Le cercle de centre $A(x_A, y_A)$, de rayon R a pour équation :

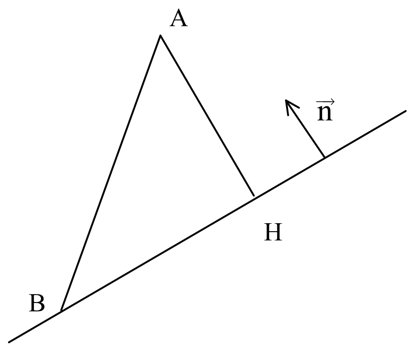
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

propriété $x^2 + y^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y + c = 0$ est l'équation d'un cercle de centre A(a,b) (ou de $\varnothing$)

8° Distance d'un point à une droite.

Soit $\mathfrak{D}$ un plan, B un point de $\mathfrak{D}$ et $\vec{n}$ vecteur normal à $\mathfrak{D}$. Un point A se projette sur $\mathfrak{D}$ en H.

$$AH = \frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Démonstration.

$M \in \mathfrak{D}$ donc il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\vec{n}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AH} = AH^2 = \lambda^2\,\|\vec{n}\|^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$

On a donc : $\lambda^2\,\|\vec{n}\|^2 = \lambda\,\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$

$\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$ et donc $AH^2 = \lambda^2\,\|\vec{n}\|^2 = \left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)^2$

II PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

E est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1° Définition : produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs . Soit A, B et C trois points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant A, B et C. On note. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$

Le réel $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est indépendant des points A, B et C choisis.

2° Expression du produit scalaire

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

Dans un repère orthonormal $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'}$

5° Distances

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

3° Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a. Calculer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CG}$

4° Propriétés

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ $\qquad \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\qquad \vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

II ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

1° Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

2° Droites orthogonales.

Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

3° Plan orthogonale à un vecteur .

a) Définition :

Une droite D est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à toutes droites du plan.
Un plan P est orthogonal à un vecteur $\vec{n}$ si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan
Le vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan P.

b) Propriétés : équation d'un plan

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point . Le plan P passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = \vec{0}$
Si $\vec{n}$ a pour coordonnées (a , b ,c) alors une équation du plan P est :de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$
Si a, b, c, d sont trois réels l'équation "$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$" est une équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$'a,b,c,d)

c) Propriétés : vecteurs normaux

- Un vecteur non nul est normal si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs du plan non colinéaires.
- Etant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{k}$, l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{k}$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{k}$.
- Si deux vecteurs sont normaux à un même plan alors ils sont colinéaires

4° Plans perpendiculaires

Deux plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal à P est orthogonal à un vecteur normal de P'.

III PROJECTION ORTHOGONALES

1° Projection orthogonale sur une droite.

Soit D une droite de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et *M* un point de l'espace projeté orthogonal de *M* sur D est le point *M'* tel que : $\overrightarrow{AM'} = \left(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}\right)\vec{u}$

2° Distance d'un point à une droite.

Soit D une droite, B un point de D et $\vec{u}$ un vecteur directeur. Un point A se projette sur D en A'.

Démontrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{BA'}\cdot\vec{u}$. En déduire que : $AA'^2 = AB^2 - \dfrac{\left(\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u}\right)^2}{\|\vec{u}\|^2}$

3° Projection orthogonale sur un plan.

Soit P un plan de vecteur normal unitaire $\vec{n}$ et *A* un point de P. *M* un point de l'espace le projeté orthogonal de *M* sur P est le point M' défini par : $\overrightarrow{MM'} = \left(\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}$

4° Distance d'un point à une droite, à un plan.

Distance d'un point à un plan.

Soit P un plan, B un point de P et $\vec{n}$ vecteur normal à P. Un point A se projette sur P en A'.

Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AA'}\cdot\vec{n}$. En déduire que $AA' = \dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

5° Distance d'un point à un plan dans un repère

$\mathscr{P}$ est un plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ dans un repère orthonormal et M_0 un point de coordonnées (x_0 , y_0 , z_0)

La distance du point M_0 au plan $\mathscr{P}$ est égale à : $\dfrac{|a\,x_0 + b\,y_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

IV GEOMETRIE ANALYTIQUE

1°Formules

$(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées (x, y, z) et (x' ,y', z')on a :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x\,x' + y\,y' + z\,z' = 0$

2° Equation d'un plan

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

P est le plan passant par A (x_A , y_A , z_A) de vecteur normal $\vec{n}$ (a,b,c)

$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$

Propriété.

L'ensemble des points M(x,y,z) tels que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ où a, b, c sont des réels non tous nuls est un plan dont le vecteur de coordonnées (a,b,c) est un vecteur normal.

Remarque.

Si $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère quelconque. $\mathscr{P}$ est un plan passant par A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$
$A(x_A , y_A , z_A)$, $\vec{u}$(a,b,c) et $\vec{v}$(a',b',c')

$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ il existe α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \alpha \times a + \beta \times a' \\ y - y_A = \alpha \times b + \beta \times b' \\ z - z_A = \alpha \times c + \beta \times c' \end{cases}$

A partir de ce système d'équation paramétrique on peut trouver une équation cartésienne de $\mathscr{P}$

3° Equation d'une sphère.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la sphère de centre $A(x_A , y_A , z_A)$, de rayon R a pour équation :
$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

propriété Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'ensemble des points dont les coordonnées (x,y,z) vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y - 2\,c\,z + d$ est soit l'ensemble vide soit une sphère de centre A(a,b,c)

4° Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\vec{k})$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - x_0 = t\ a \\ y - y_0 = t\ b \\ z - z_0 = t\ c \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_0 + t\ a \\ y = y_0 + t\ b \\ z = zz_0 + t\ c \end{cases}$ ceci est une représentation paramétrique

cas des demi-droites

$M \in [AB) \Leftrightarrow$ il existe un réel $t \geq 0$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $t \geq 0$ tel que $\begin{cases} x - x_0 = t\ a \\ y - y_0 = t\ b \\ z - z_0 = t\ c \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $t \geq 0$ tel que $\begin{cases} x = x_0 + t\ a \\ y = y_0 + t\ b \\ z = zz_0 + t\ c \end{cases}$ ceci est une représentation paramétrique

cas des segments

$M \in [AB] \Leftrightarrow$ il existe un réel $0 \leq t \leq 1$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $0 \leq t \leq 1$ 0 tel que $\begin{cases} x - x_0 = t\ a \\ y - y_0 = t\ b \\ z - z_0 = t\ c \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $0 \leq t \leq 1$ tel que $\begin{cases} x = x_0 + t\ a \\ y = y_0 + t\ b \\ z = zz_0 + t\ c \end{cases}$ ceci est une représentation paramétrique

5° vecteur colinéaires. $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\vec{u} = t\ \vec{v} \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} a = t\ a' \\ b = t\ b' \\ c = t\ c' \end{cases}$