$\boxed{1}$ On chauffe dans une grosse cuve un liquide et on appelle g(t) sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes, g étant une fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$.
On admet que la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = g(t) - 100$ est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2 \times 10^{-4} y = 0$ vérifiant $f(0) = -80$.
1° a) Résoudre l'équation différentielle (E). b) Exprimer f(t) en fonction de t.
2° Montrer que : $g(t) = 100 - 80\, e^{-2 \times 10^{-4} t}$.
3° a) Calculer g(0), la température du liquide à l'instant t = 0.
b) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85 °C ?

$\boxed{2}$ On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' + y = x + 1$ (E)
a) Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$
b) Déterminer les réels a et b pour que la fonction numérique $x \longmapsto a x + b$ soit solution de (E)
c) Démontrer que les fonction f_α définies par $f_\alpha(x) = x + \alpha\, e^{-x}$ sont solution de l'équation (E)
2° On $(\mathscr{C}_\alpha)$ la courbe représentative de f_α où α est un paramètre réel donné.
a) Etudier les variations de f_α et donner l'allure de $(\mathscr{C}_\alpha)$ dans les trois cas : $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$.
b) Montrer que, pour tout α, la tangente à $(\mathscr{C}_\alpha)$ au point d'abscisse -1 passe par l'origine des axes.

$\boxed{3}$ Un réservoir contient 1 000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0{,}12\ g \cdot L^{-1}$.
A la suite d'un incident regrettable, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute.
On note s la salinité de l'eau du réservoir; s est une fonction du temps t (exprimé en minutes).
On admet que s est solution de l'équation différentielle : (E) : $s'(t) + 0{,}01\, s(t) = 0{,}39$.
1° Résoudre l'équation différentielle (E).
2° Considérant qu'à l'instant t = 0 où débute l'incident la salinité de l'eau du réservoir était de $0{,}12\ g \cdot L^{-1}$, montrer que l'on a : $s(t) = 39 - 38{,}88\, e^{-0{,}01 t}$
3° Déduire du résultat précédent la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident.
4° De combien de temps le service de surveillance dis-pose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée si, pour réduire les conséquences de l'incident, la salinité doit rester inférieure à $3{,}9\ g \cdot L^{-1}$?

$\boxed{1}$ 1° a) $y' + 2 \times 10^{-4} y = 0 \Leftrightarrow y\,‘z = -2\ 10^{-4}\ y$ Solution $f : t \longmapsto C\, e^{-2 \times 10^{-4} t}$
b) $C\, e^{-2 \times 10^{-4} \times 0} = -80 \Leftrightarrow C = -80$. $f : t \longmapsto -80\, e^{-2 \times 10^{-4} t}$
2° $g(t) = f(t) + 100 = 100 - 80 e^{-2 \times 10^{-4} t}$.
3° a) $g(0) = 100 - 80\, e^{-2 \times 10^{-4} \times 0} = 100 - 80 = 20$
b) $100 - 80 e^{-2 \times 10^{-4} t} = 85 \Leftrightarrow -80 e^{-2 \times 10^{-4} t} = -15 \Leftrightarrow e^{-2 \times 10^{-4} t} = \dfrac{15}{80} \Leftrightarrow -2 \times 10^{-4} \times t = \ln\left(\dfrac{3}{16}\right) \Leftrightarrow t \approx 8370$ s
$t \approx 2$ h 20 min

$\boxed{2}$ a) $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. Solutions $f : x \longmapsto C\, e^{-x}$
b) $f(x) = a x + b$ et $f'(x) = a$. $f'(x) + f(x) = x + 1$
$\Leftrightarrow a x + b + a = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$
c) $f_\alpha(x) = x + \alpha\, e^{-x}$ et $f_\alpha'(x) = 1 - \alpha\, e^{-x}$.
$f_\alpha'(x) + f_\alpha(x) = 1 - \alpha\, e^{-x} + x + \alpha\, e^{-x} = 1 + x$. f_α est solution de (E)
2° a) $f_\alpha'(x) = 1 - \alpha\, e^{-x}$. $f_\alpha'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha\, e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\, e^{-x} \leq 1$.
Si $\alpha > 0 : \alpha\, e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow -x \leq \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow x \geq \ln\alpha$
Si $\alpha < 0 : \alpha\, e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geq \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow x \leq \ln\alpha$
Si $\alpha = 0 : f_0(x) = x$.

$\alpha > 0$

x	$-\infty$	$\ln\alpha$	$+\infty$
signe f '(x)	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	$1 + \ln\alpha$	↗ $+\infty$

$\alpha < 0$

x	$-\infty$	$\ln\alpha$	$+\infty$
signe f '(x)	$+$	0	$-$
f	$-\infty$ ↗	$1 + \ln\alpha$	↘ $-\infty$

$\boxed{3}$ 1° s $t \longmapsto C\ e^{-0{,}01\ t}$ $\dfrac{0{,}39}{0{,}01}$ Donc $s(t) = 39 + C\ e^{-0{,}01\ t}$.
2° $s(0) = 0{,}12 \Leftrightarrow 39 + C\ e^{-0{,}01 \times 0} = 0{,}12 \Leftrightarrow C = 0{,}12 - 39$ $\underline{s(t) = 39 - 38{,}88\, e^{-0{,}01 t}}$
3° $s(60) = 39 - 38{,}88\, e^{-0{,}01 \times 60} \approx 17{,}66$.
4° $s(t) \leq 3{,}9 \Leftrightarrow s(t) = 39 - 38{,}88\, e^{-0{,}01 t} = 3{,}9 \Leftrightarrow e^{-0{,}01 t} = 39 - 3{,}9 \Leftrightarrow e^{-0{,}01 t} = \dfrac{35{,}1}{38{,}88}$
$\Leftrightarrow -0{,}01\ t = \ln\left(\dfrac{35{,}1}{38{,}88}\right)$. $t \approx 10{,}23$.