Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet la construction d'une représentation graphique approchée d'une fonction lorsque la fonction elle-même n'est pas connue explicitement, mais lorsqu'on connaît sa fonction dérivé et sa valeur en un autre point

On utilise la méthode l'approximation affine de la fonction : si f est dérivable sur un intervalle I, a et a + h des réels de I, h proche de 0, alors **: $f(a + h) \approx f(a) + h f'(a)$.**

A la recherche de la fonction exponentielle. Utilisation d'exel

On cherche à trouver une approximation sur [– 2 : 2] d'une fonction f vérifiant :

$$\begin{cases} \textbf{f définie sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On va donc chercher à obtenir des courbes approchés, pour différentes valeurs du pas h, sur l'intervalle [– 2 ;2]. (plus h sera petit plus l'approximation sera précise)

1° Cas général.

Soit h un réel positif.

Sur l'intervalle [0 ; 2] avec , découpé en n intervalles d'amplitude **h**, (le pas de la méthode étant donc ici **h**) .

La méthode d'Euler nous conduit à construire la suite d'abscisses (x_k) et la suite d'ordonnées (y_k) qui sont des valeurs approchées des $f(x_k)$, de la façon suivante : $\boxed{\mathbf{x_{k+1} = x_k + h \text{ et } y_{k+1} = (1 + h)\, y_k}}$

Soit en effet les suites (x_k) et $y_k)$ définies par récurrence par : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{k+1} = (1 + h)\, y_{k+1} \end{cases}$

On peut dire par récurrence que pour tout entier k on a : $y_k \approx f(x_k)$

Initialisation : $y_0 = 1 = f(0) = f(x_0)$

Hérédité : Si $y_k \approx f(x_k)$

On sait que $f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + h \times f'(x_k)$. Comme $f'(x_k) = f(x_k)$ on a $f(x_{k+1}) \approx (1 + h) f(x_k)$

$$\left.\begin{array}{r} y_k \approx f(x_k) \\ y_{k+1} = (1 + h)\, y_k \\ f(x_{k+1}) \approx (1 + h) f(x_k) \end{array}\right\} \text{ on peut donc dire que } f(x_{k+1}) \approx y_{k+1}$$

La précision est difficile à déterminer mais on peut dire que plus h est proche de 0 plus l'approximation est précise.

La ligne brisée passe par les points $M_k\ (x_k\ ;\ y_k)$.

x_k	y_k
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 1$
$x_1 = h$	$y_1 = (1 + h)\, y_0 = 1 + h$
$x_2 = x_1 + h = 2\, h$	$y_2 = (1 + h) \times y_1 = (1 + h)^2$
$x_3 = x_2 + h = 3\, h$	$y_3 = (1 + h) \times y_2 = (1 + h)^3$
$x_n = n \times h \geq 2$	$x_n = (1 + h)^n$

Sur l'intervalle [– 2 ;0] $x'_{k+1} = x'_k - h$.

La méthode d'Euler donne : $f(x'_{k+1}) = f(x'_k - h) \approx f(x'_k) - f'(x'_k) \times h$ c'est à dire $f(x'_{k+1}) \approx f(x_k) \times (1 - h)$

On peut utiliser une autre approximation : $f(x'_k) \approx f(x'_{k+1}) + f'(x'_{k+1}) \times h$ ce qui donne $f(x_{k+1}) \approx \dfrac{f(x_k)}{1 + h}$

On construit alors la suite d'abscisses (x'_k) et la suite d'ordonnées (y'_k) qui sont des valeurs approchées des $f(x_k)$, de

la façon suivante : $\boxed{\mathbf{x'_{k+1} = x'_k - h \text{ et } y'_{k+1} = \dfrac{y'_k}{1 + h}}}$

La La suite (x_k) est arithmétique de raison h,

la suite (y_k) est géométrique de raison 1 + h,

La suite (x'_k) est arithmétique de raison – h,

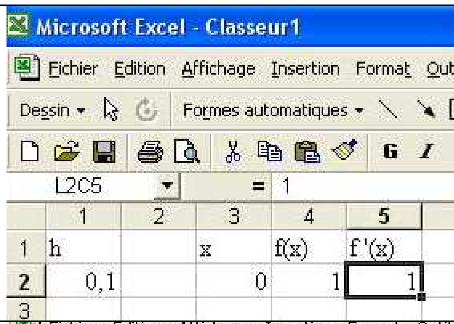
la suite (y'_k) est géométrique de raison $\dfrac{1}{1 + h}$

La ligne brisée passe par les points $M'_k\ (x'_k\ ;\ y'_k)$.

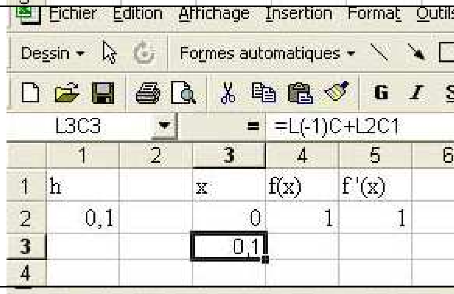
x'_k	y'_k
$x'_0 = 0$	$y'_0 = f(0) = 1$
$x'_1 = - h$	$y'_1 = \dfrac{y_0}{1 + h} = \dfrac{1}{1 + h}$
$x'_2 = x'_1 + h = 2\, h$	$y'_2 = \dfrac{y_1}{1 + h} = \dfrac{1}{(1 + h)^2}$
$x_n = - n \times h \leq - 2$	$x_n = \dfrac{1}{(1 + h)}^n$

2° Avec Excel et h = 0,1. Passer au style de référence L1C1 : Menu outil $\longmapsto$ option $\longmapsto$ génral
Pour programmer les suites on peut utiliser les calculs faits à la question précédente.
On choisit de n'utiliser que la méthode d'Euler.
Sur [0 ; 2] : $x_{k+1} = x_k + h$ et $y_{k+1} = f(x_k) + f'(x_k) \times h$

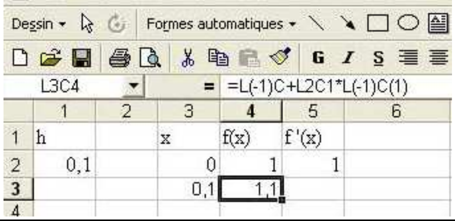
$1^{\text{ière}}$ étape.
On défmi deux cases
Une case h = et une case contenant la valeur de h choisie.
Utiliser le pavé numérique à droite pour taper 0.1
On défini trois collonnes
La $1^{\text{ière}}$ représente x
La deuxième f(x)
La troisième f '(x)



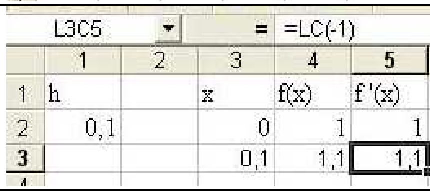
$2^{\text{ième}}$ étape: $x_{k+1} = x_k + h$
En L3C3 : L(-1)C+L2C1
LC(-1) fait référence à la cellule située sur la même ligne et sur la colonne précédente
LC(-1) = x_k
L1C2 fait référence à la cellule qui contient la valeur de h
L1C2=h



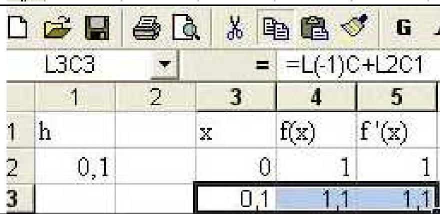
$3^{\text{ième}}$ étape : $f(x_{k+1}) = f(x_k) + h \times f'(x_k)$
En L3C4 : L(-1)C+L2C1*L(-1)C(1)
LC(-1) = $f(x_k)$ L1C2 = h
L(-1)C(-1) fait référence à la cellule située sur la ligne précédente et la colonne précédente
L(-1)C(-1) = $f'(x_k)$



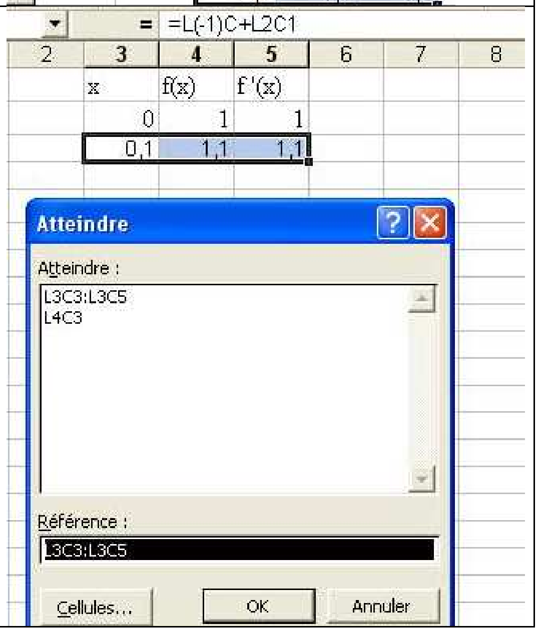
$4^{\text{ième}}$ étape : $f'(x_k) = f(x_k)$
En L3C5 : LC(-1)
LC(-1) fait référence à la cellule située sur la colonne précédente et dans la même ligne.
L(-1)C = f (x_k)



$5^{\text{ième}}$ étape
On variable aléatoire maintenant copier les formules de calcul des trois cellules : L2C3, L3C3 et L4C3.
On doit les recopier jusqu'à ce que xk = 2 c'est-à-dire jusqu'à ce que n h = 2 c'est-à-dire jusqu'à ce que n = 20.



6ieme étape
On sélectionne les cellules où on variable aléatoire recopier les formule des cellules L2C3, L3C3 et L4C3.
On se place sur la cellule L2C4. On utilise la commande Edition / Atteindre (crt T)
Derniéres cellules à sélectionner L4C22



$7^{\text{ième}}$ étape
On copie les cellules dans la sélection.