DETERMINATION DE LIMITE

VI RECHERCHE DE LIMITES AUX POINTS QUI ANNULENT LE DENOMINATEUR

1 Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1 :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$ | b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4}$ | c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+4} - 3}{x - 1}$

2 Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ et $x_0 = 0$ | b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ et $x_0 = 0$ | c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{(x-9)^2}$ et $x_0 = 9$

Calculer la valeur prise par le numérateur.
1^ier cas : elle est différente de 0, la limite est infinie; étudier le signe du dénominateur.
2^ième cas : Si elle est égale à 0, factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier.
Ou faire apparaître un taux d'accroissement et utiliser la fonction dérivée)

VI RECHERCHE DE LIMITES AVEC UN ENCADREMENT

1 Fonction φ définie sur [0 ; + ∞[par : $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{2 + \cos x}{\sqrt{x} + 1}}$

a) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 0, on a : $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$ et 0 < et $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) En déduire que, pour x > 0, $0 \leq \dfrac{2 + \cos x}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2 Fonction k définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{k(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}}$. Pourquoi peut-on écrire : $0 \leq \left| x^2 \sin\dfrac{1}{x} \right| \leq x^2$?

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} k(x)$

3 Utiliser une méthode analogue d'encadrement pour déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin 2x}{x^2}$ | $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$.

VII RECHERCHE DE LIMITES AVEC UNE FONCTION COMPOSEE

1 Soit la fonction f définie sur]0 ; ∞ [par $f(x) = \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}$.

1° Déterminer, par comparaison, la limite de f en + ∞.

2° On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) Montrer que, pour tout x non nul, on a $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$. En déduire la limite de g en 0

b) A l'aide d'une composée, déterminer alors la limite de f en 0^+.

2 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$. Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ calculer :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}$ | b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\sqrt{1 + 2\cos x} - 1}{\cos x}$ | c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} - 1\right)$

VI RECHERCHE DE limites aux points qui annulent le dénominateur

$\boxed{1}$ **Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1 :**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 2x - 5 = -6$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 2x + 4 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 2x + 4 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$.

En appliquant les règles de calcul sur les limites on obtient $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-3}{x+4} = \dfrac{0-3}{0+4} = -\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{5x+4} - 3}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{5x+4} - 3)(\sqrt{5x+4} + 3)}{(x-1)(\sqrt{5x+4} + 3)} = \dfrac{5x+4-9}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} = \dfrac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x+4}+3)} = \dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+3}$

En appliquant les règles de calcul sur les limites on obtient : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+3} = \dfrac{5}{\sqrt{0+4}+3} = 1$.

$\boxed{2}$ **Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers x_0 :**

a) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ **et** $x_0 = 0$

On reconnaît un taux d'accroissement $\dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ **et** $x_0 = 0$

On peut reconnaître un taux d'accroissement où utiliser les quantités conjuguées.

$\dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \dfrac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

En appliquant les règles de calcul sur les limites on a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \dfrac{1}{4}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{(x-9)^2}$ **et** $x_0 = 9$

$\dfrac{\sqrt{x} - 3}{(x-9)^2} = \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(x-9)^2} = \dfrac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(x-9)^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{x}+3)(x-9)}$

$\lim\limits_{x \to 9^-} (\sqrt{3} + 3)(x - 9) = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} (\sqrt{3} + 3)(x - 9) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = +\infty$.

<u>VI RECHERCHE DE LIMITES AVEC UN ENCADREMENT</u> $\boxed{1}$ **Fonction φ définie sur [0 ; + ∞[par :** $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{2+\cos x}{\sqrt{x}+1}}$

a) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 0, on a : $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$ et 0 < et $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Pour tout réel x de [0 , + ∞ [on a :

$-1 \leq \cos x \leq 1$ donc

$-1+2 \leq 2+\cos x \leq 1+2$

(en ajoutant 2 à chaque membre des inégalités)

$0 < 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

on a aussi

$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{x}+1$

la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) En déduire que, pour x > 0, $0 \leq \dfrac{2+\cos x}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

$$\left.\begin{array}{r} 0 < 1 \leq 2+\cos x \leq 3 \\ 0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}\right\} \text{donc } 1 \times 0 \leq (2+\cos x) \times \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$$

(en multipliant membre à membre des inégalités de même sens où tout est positif

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

$\boxed{2}$ **Fonction k définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boxed{k(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}}$. Pourquoi peut-on écrire : $0 \leq \left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| \leq x^2$? En déduire $\lim\limits_{x \to 0} k(x)$**

Pour tout réel x non nul on a :

$$0 \leq \left| \sin\frac{1}{x} \right| \leq 1$$

donc $0 \times x^2 \leq \left| \sin\dfrac{1}{x} \right| \times x^2 \leq 1 \times x^2$

en multipliant par $x^2 > 0$

donc $0 \leq \left| x^2 \sin\dfrac{1}{x} \right| \leq x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

$\boxed{3}$ **Utiliser une méthode analogue d'encadrement pour déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin 2x}{x^2}$**

Pour tout réel x non nul on a : $-1 \leq \sin 2x \leq 1$

donc $-\dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{\sin 2x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$

En divisant pas $x^2 > 0$

$\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x^2} = 0$

Théorème des gendarmes

$\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Pour tout réel x non nul on a : $\left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq 1$

En multipliant par | x | > 0

donc $| x | \times \left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq | x |$

donc $\left| x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq | x |$

$\lim_{x \to 0} | x | = 0$ donc $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

Théorème des gendarmes

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$.

Pour tout réel x positif

$-1 \leq \sin x \leq 1$

En multipliant par x > 0

donc $-x \leq x \sin x \leq x$

donc $-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \sin x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$

En divisant par $x^2 + 1 > 0$

$\lim_{x \to 0} -\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{x^2+1} = 0$

Règle de calcul de limites
puis théorème des gendarmes

VII RECHERCHE DE LIMITES AVEC UNE FONCTION COMPOSEE $\boxed{1}$ **Soit la fonction f définie sur]0 ; ∞ [par f(x) =** $\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}$**. 1° Déterminer, par comparaison, la limite de f en + ∞.**

Pour tout réel x strictement positif on a : $-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq 1$

donc $1 - 1 \leq 1 - \cos\sqrt{x} \leq 1 + 1$

$x \to 1 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

donc $\frac{0}{x} \leq \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} \leq \frac{2}{x}$

En divisant par x > 0

$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = 0.$

Théorème des gendarmes

2° On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$

a) Montrer que, pour tout x non nul, on a $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$. En déduire la limite de g en 0

On sait que $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$ donc $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$

$$g(x) = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x/2)}{(x^2/4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2.$$

$X = x/2$. et $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2. = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2$

$\lim_{x \to 0} x/2 = 0$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2. = \lim_{X \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin X}{X}\right)^2 = 0$

b) A l'aide d'une composée, déterminer alors la limite de f en 0^+.

$X = \sqrt{x}$ c'est à dire $x = X^2$ et $\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = \frac{1 - \cos X}{X^2}$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} = \lim_{X \to 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \lim_{X \to 0} g(X) = 0.$$

$\boxed{2}$ **Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$:**

$\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x}$ On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$. Reste à calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$

$X = \sin x$ et $\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x} = \frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{\sqrt{1+X}-1}{X} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{\cos x}$

$X = 2\cos x$ c'est à dire $\cos x = X/2$ et $\frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{\cos x} = \frac{\sqrt{1+X}-1}{X/2} = 2\,\frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{\cos x} = \lim\limits_{X \to 0} 2 \times \frac{\sqrt{1+X}-1}{X} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right)$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}}$$

$X = -\frac{1}{x}$ c'est à dire $x = -\frac{1}{X}$ et $x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right) = -\frac{1}{X}(\sqrt{1+X}-1) = -\frac{\sqrt{1+X}\times 1}{X}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim\limits_{X \to 0} -\frac{\sqrt{1+X}\times 1}{X} = -\frac{1}{2}$