FONCTIONS DERIVABLES

I NOMBRE DERIVE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1° Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, C_f sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et a un élément de I.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$ (où d est un réel)
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = d$
- Pour h voisin de 0 on a : $f(a + h) = f(a) + d \times h + h \times \varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
- La courbe C_f admet au point d'abscisse a une tangente :la droite d'équation " $y = f(a) + d\,(x - a)$ "

Si f vérifie l'une des quatre conditions on dit que f est dérivable en a et le réel d est le nombre dérivé de f en a.

On note alors $d = f\,'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

2° Exemples d'utilisation

a) Tangente à une courbe

Par définition si f est dérivable en a alors sa représentation graphique admet une tangente au point d'abscisse a.

Cette tangente a pour équation : $\boxed{f(x) = f(a) + f\,'(a) \times (x - a)}$

b) Approximation de f(x) au voisinage de a

L'équation de la tangente donne la meilleur approximation affine de f(x).

$f(x) \approx f(a) + f\,'(a) \times (x - a)$ pour x voisin de a.

$f(a + h) \approx f(a) + f\,'(a) \times h$ pour h voisin de 0.

Ex La deuxième approximation donne : $\sqrt{4{,}00002} \approx 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}} \times 0{,}00002$. Donc $\boxed{\sqrt{4{,}00002} \approx 2{,}{,}000005}$.

La première approximation au voisinage de 1 donne : $\ln(x) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \times (x - 1)$ c'est-à-dire $\ln(x) \approx x$

Donc $\ln(1{,}0000003) \approx 1{,}0000003$

c) Calculs de limites

La fonction sin est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(0 + h) - \sin 0}{h} = \sin'0$. Ce qui donne $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Pour calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{x - 1}$ (FI du type "$\frac{0}{0}$")

On peut utiliser le nombre dérivée de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ en 1.

$g(1) = 1$ et $g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1^2 - 3 \times 1 + 3}}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{x - 1} = g\,'(1) = \frac{1}{2}$

d) Interprétation cinématique du nombre dérivé :

dans le cas où f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement.

La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors : $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f\,'(t_0)$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

3° Nombre dérivé à droite à gauche

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_d'(a)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f_g'(a)$

Exemples

a) $f(x) = \dfrac{\lvert x - 1\rvert + 1}{\lvert x - 1\rvert + x}$ dérivabilité en 1.	b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ dérivabilité en 0	c) $f(x) = \dfrac{-x + \sqrt{x}}{x - 1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = -\dfrac{1}{2}$

a) f est continue en 1 et $f(1) = \dfrac{\lvert 0 - 1\rvert \ + 1}{\lvert 0 - 1\rvert + 0} = 1$.

La dérivabilité en 1 n'est pas donné par les formules car la fonction $x \longmapsto \lvert x - 1\rvert$ n'est pas dérivable en 1

Si $x \leq 1$ alors $f(x) = \dfrac{\lvert x - 1\rvert + 1}{\lvert x - 1\rvert + x} = \dfrac{-(x - 1) + 1}{-(x - 1) + x} = -x + 2$ donc $\dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{-x + 2 - 1}{x - 1} = \dfrac{-x + 1}{x - 1} = -1$

donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = -1$ donc f est dérivable à gauche de 1 et $f_g(1) = -1$.

Si $x \geq 1$ alors $f(x) = \dfrac{x - 1 + 1}{x - 1 + x} = \dfrac{x}{2x - 1}$ $\quad \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{\dfrac{x}{2x - 1} - 1}{x - 1} = \dfrac{\dfrac{x - 2x + 1}{2x - 1}}{x - 1} = \dfrac{-x + 1}{2x - 1} \times \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{-1}{2x - 1}$

donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{-1}{2 - 1} = -1$. $= -1$ donc f est dérivable à droite de 1 et $f_d(1) = -1$. $f_g(1) = f_d(1)$ donc f est dérivable en 1.

b) f est continue à droite de 0 mais la dérivabilité n'est pas donnée par les formules car la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. $f(0) = \dfrac{\sqrt{0} + 1}{\sqrt{0} - 1} = -1$

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + 1}{x} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}}{x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{(\sqrt{x} - 1) \times \sqrt{x}}$. donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$. f n'est pas dérivable à droite de 0 mais sa représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

4° fonction dérivable sur un intervalle.

Si f admet un nombre dérivé en tout points de l'intervalle Ion dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur I. On la note f '

5° Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Si f est dérivable sur l'intervalle I alors f est continue sur I.

Démonstration :

Si f est dérivable en a alors pour tout réel x de I on a : $f(a + h) = f(a) + f'(a) \times h + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} f'(a) \times h = 0$ on peut dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$. Ce qui prouve que la fonction f est continue en a.

Attention : la réciproque est fausse.

Par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 et pourtant elle n'est pas dérivable en 0

. **Attention : une fonction f peut être dérivable (et donc continue) sans que sa dérivée f′ soit continue** :

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point a il faut étudier la limite de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et il ne faut surtout pas étudier la limite de f ' en a. en effet la fonction f ' n'est pas toujours continue.

Voir exemple plus loin.

6° Dérivées successives

f est dérivable sur I. On note $f' = \dfrac{df}{dx}$ sa fonction dérivée première de f (ou d'ordre 1).

f ' est dérivable sur I. On note $f'' = \dfrac{d^2f}{d^2x}$ la fonction dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f.

f '' est dérivable sur I. On note $f^{(3)} = \dfrac{d^3f}{d^3x}$ la fonction dérivée troisième (ou d'ordre 3) de f.

Exemples de fonction dérivable sur un intervalle I contenant a et dont la fonction dérivée n'est pas continue en a

$\boxed{1}$ Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Continuité de f en 1 : $f(x) = \dfrac{(-x+\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \dfrac{-x^2+x}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \dfrac{-x}{x+\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1}} = -\dfrac{1}{2}$

f est bien continue en 1.

Dérivabilité en 1 : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{-x}{x+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}}{x-1} = \dfrac{-2x+x+\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})(x-1)} = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1} \times \dfrac{1}{2(x+\sqrt{x})} = \dfrac{-x}{2(x+\sqrt{x})^2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{-1}{2(1+\sqrt{1})^2} = -\dfrac{1}{8}$. f 'est dérivable en 1 et $f'(1) = -\dfrac{1}{8}$

Continuité de f ' en 1

pour $x \in]0, 1[\cup]1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times (x-1) - (-x+\sqrt{x})}{(x-1)^2} = \frac{(-2\sqrt{x}+1)(x-1) - 2\sqrt{x}(-x+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{-2x\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}-1+2x\sqrt{x}-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \frac{2\sqrt{x}-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$.

La fonction f ' n'est pas continue en 1

$\boxed{2}$ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Continuité en 0 : $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$: $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

$x^2 > 0$ donc $\left|x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$ donc $|f(x)| \leq x^2$

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. f est bien continue en 0.

Dérivabilité en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

$|x| > 0$ donc $\left|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ donc $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq |x|$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. f est bien dérivable en 0.

Continuité de f ' en 1

Pour $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x^2} = 2x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et la fonction $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 donc f ' n'a pas de limite en 0.

f ' n'est donc pas continue en 0.

En fait si f ' admet une limite finie en a alors f ' est dérivable en a de nombre dérivé f ''(a).

II CALCUL DE FONCTIONS DERIVEES

1° Dérivée d'une fonction composée.

Théorème : Soit u une fonction dérivable en x_0 et f une fonction dérivable en $u(x_0)$ Alors $f \circ u$ est dérivable en x_0 et : $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \times u'(x_0)$

Exemples Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur I. α un réel

La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.

La fonction u^α est dérivable sur I $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1} \times u'}$

2° Dérivée des fonctions usuelles

fonction.	Dérivée.	Dérivabilité sur.
$f(x)\ k \quad k \in I,R$	$f'(x) = 0$	I, R
$f(x) = x^n \quad n \in I,N^*$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	I, R
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in I,N^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0\,[$ ou $]\,0\,;+\infty\,[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	I, R
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	I, R

3°Dérivées et opérations

fonction.	Dérivée.
Somme : $f = u + v$	$f' = u' + v'$
Produit : $f = k \cdot u$ $f = u \cdot v$	$f' = k \cdot u'$ $f' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotient : v ne s'annule pas $f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$ $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Composée : $f = g \circ u$ $f = u^\alpha$ $f = \sqrt{u}$ (pour $u \geq 0$)	$f' = u' \times (g' \circ u)$ $f' = u' \times \alpha \times u^{\alpha-1}$ $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (pour $u > 0$)

III APPLICATION DE LA FONCTION DERIVEE.

1° Application de la dérivation au sens de variation d'une fonction

Théorème

Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f ' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f ' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
Si f est dérivable sur l'intervalle I et si f ' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

2° Extremum local et fonction dérivée.

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un point intérieur à I.
Si f ' s'annule en a en changeant de signe alors f a un extremum local en a.
Remarque : f admet un maximum local en a signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que f(a) soit le maximum de f sur J. $\forall\, x \in J, f(x) \leq f(a)$.
f admet un minimum local en a signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que f(a) soit le minimum de f sur J. $\forall\, x \in J, f(x) \leq f(a)$.

3° Recherche d'extremum

Pour la recherche d'un extremum local nous disposons du théorème suivant

Théorème

Si f est dérivable sur l'intervalle I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point a distinct des extrémités de I, alors $f'(\alpha) = 0$.

Démonstration du III 3° : (hors ROC)

f admet un maximum local en a signifie qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant a tel que f(a) soit le maximum de f sur J. $\forall x \in J, f(x) \leq f(a)$.

Pour tout réel x appartenant à J et strictement inférieur à a on a $\left.\begin{matrix} x-a<0 \\ f(x)-f(a) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ on peut dire que $f'(a) \leq 0$

Pour tout réel x appartenant à J et strictement supérieur à a on a $\left.\begin{matrix} x-a>0 \\ f(x)-f(a) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ on peut dire que $f'(a) \geq 0$.