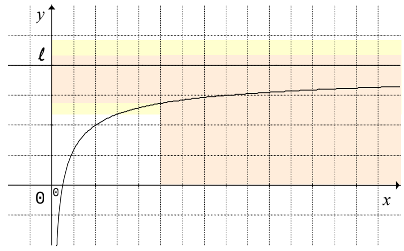
I LIMITES D'UNE FONCTION EN + ∞ ET EN – ∞

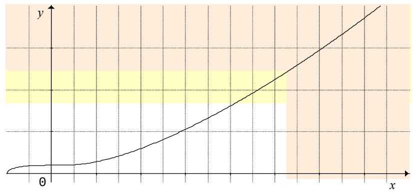


1° Limite en + ∞ et en – ∞

Définition Limite finie en + ∞

- Soit ℓ un réel ; On dit que **f (x) tend vers ℓ lorsque x tend vers + ∞** quand **tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand.**

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$



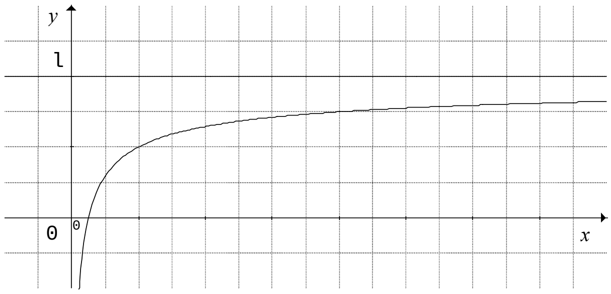
Définition Limite finie en + ∞

On dit que f (x) tend vers ∞ lorsque x tend vers + ∞ **, quand** tout intervalle du type [A, +∞ [contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de manière analogue la notation: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ (α réel ou $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$

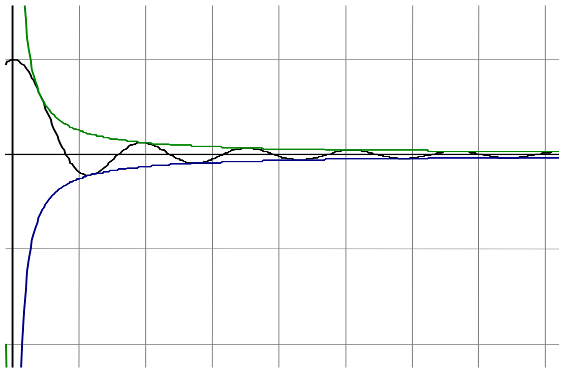
2° Asymptotes.



- **asymptote « horizontale »**

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la distance mM tend vers 0 quand x tend vers + ∞ (Fig. 2). On dit alors que la droite Δ , d'équation **y = l, est une asymptote** à $\mathscr{C}_f$ en + ∞ .

Il en est de même lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.



Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

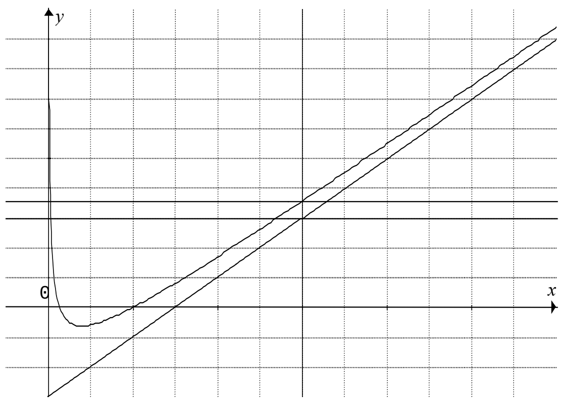
On étudie la limite en + ∞ de f.

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Donc pour tout réel x > 0 , $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ on peut dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

- **asymptote « oblique »**



Si $f(x) = a x + b + \varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, on dit que la droite Δ d'équation y = a x + b est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en + ∞ .

La définition est analogue en – ∞ .

Remarques

• Si m et M sont les points respectifs de Δ et $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x, on a $\varphi(x) = y_M - y_m$, ce qui permet d'interpréter la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ par « $\mathscr{C}_f$ se rapproche de Δ lorsque x tend vers + ∞ ».

• Le signe de (p (x) = y_M - y_m détermine la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ : au-dessus lorsque $\varphi(x) > 0$, au-dessous lorsque $\varphi(x) < 0$.

3° Fonction de référence. Théorème

Chacune des fonctions suivantes a pour limite + ∞ , quand x tend vers + ∞

$x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x$; $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^n$

Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0, quand x tend vers + ∞

$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$

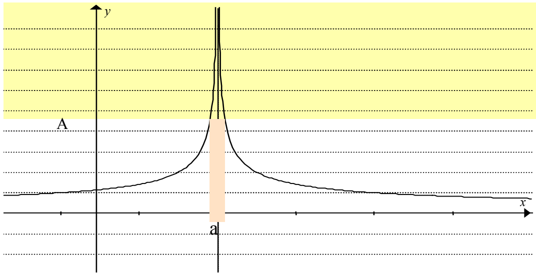
Remarque: une fonction n'admet pas nécessairement de limite en +∞ : par exemple, de la fonction **sinus**.

II LIMITE EN a (a REEL)

Soient des fonctions définies sur **un intervalle contenant a** ou sur **un intervalle de borne a :**] ... a[ou]a, ... [

1° Définition

- Soit ℓ un réel : On dit que **f (x) tend vers ℓ lorsque x tend vers a** quand **tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez voisin de a .** On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
- On dit que f (x) **tend vers + ∞ lorsque x tend vers a** , quand **tout intervalle du type [A, +∞ [contient toutes les valeurs de f (x) pour x assez voisin de a.** On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



2° Asymptote parallèle à (Oy)

Lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite Δ « **x = a** » **est asymptote à $\mathscr{C}_f$**

3° Exemple de limite à droite et à gauche

a) Soit la fonction f définie pour $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$.

Au voisinage du point 2, f prend des valeurs positives très grandes et des valeurs négatives très petites, donc f n'a pas de limite au point 2.

Soit f_1 la **restriction à] – ∞ , 2 [** de f

$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 2[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{3}{x-2} \end{cases}$ tend vers – ∞ u point 2. On écrit : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

De même : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

On dit que f admet au point 2 comme **limite à gauche – ∞** et comme **limite à droite** + ∞ .

b) Soit la fonction f définie pour $x \neq 0$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1}$

x	– 1.1	1,0002	–1,0000054	1,0013	1,0025	–1,00012
f(x)	– 1,1	3,0002	–1,0000054	3,0013	3,0025	–1,00012

Soit f_1 la **restriction à] – ∞ , 1 [** de f $f_1 : \begin{cases}]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2 + \lvert x-1\rvert - 1}{x-1} \end{cases}$ Si $x < 1$ $f(x) = f_1(x) = x$. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f_1(x) = 1$	Soit f_2 la **restriction à] 1 , + ∞ [** de f $f_2 : \begin{cases}]1, +oo[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x^2 + \lvert x-1\rvert - 1}{x-1} \end{cases}$ Si $x > 1$ $f(x) = f_2(x) = x + 2$. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f_2(x) = 3$

III CALCULS DE LIMITES

1° limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

Dans chaque cas, il s'agit de limites au même « point α » (a réel ou a $+\infty$ ou $-\infty$).

a) Limite d'une somme

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en α, la fonction f + g admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau .

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) + g(x))$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Limite d'un produit

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en α, la fonction fg admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	L' > 0	L' < 0	$+\infty$	$-\infty$	0
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x) \times g(x))$	L $\times$ L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

c) Limite d'un quotient

Les fonctions f et g ayant une limite (finie ou infinie) en α, la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas décrits par le tableau.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L > 0	L	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L' $\neq$ 0	0+	$+\infty$	L' > 0	0+	$+\infty$	0
alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

Remarque : si L' = 0 , on peut conclure lorsque g garde un signe constant « au voisinage de α ».

2° limites par comparaison

Les résultats ci-dessous permettent, dans certains cas, de déterminer la limite lorsque x tend vers α (α fini ou infini) d'une fonction f par comparaison à d'autres fonctions u, v... dont le comportement est connu.

a) Théorème des « gendarmes »

Si, pour x « assez voisin de α », on a l'encadrement $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si **u et v ont la même limite** finie ℓ en α, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$

b) Démonstration dans le cas où $\alpha = +\infty$

« x assez voisin de $+\infty$ « signifie alors « x assez grand » c'est à dire qu'il existe un réel A tel que $x \geq A$

u (x) tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ donc tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient toutes les valeurs de u (x) « pour x assez grand. » $(x \geq A1)$

v (x) tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ donc tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient toutes les valeurs de v (x) « pour x assez grand. » $(x \geq A2)$

« pour x assez grand » $(x \geq A3)$ $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$

On a donc « pour x assez grand » $(x \geq \sup(A1,A2,A3))$ on a

$$\left.\begin{array}{c} u(x) \in I \\ v(x) \in I \\ u(x) \leq f(x) \leq v(x) \end{array}\right\} \text{donc comme I est un intervalle on peut dire que } f(x) \in I$$

Conclusion. Pour tout réel x « assez grand », $f(x) \in I$. On peut donc dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

c) Cas d'une limite infinie

Si, pour x « assez voisin de α », on a l'inégalité $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$,alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

Si, pour x « assez voisin de α », on a l'inégalité $f(x) \leq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = -\infty$,alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

d) exemples

comportement en $+\infty$ de $f : x \longmapsto x - 2 \sin x$.	comportement en 0 de $f : x \longmapsto \sin \dfrac{1}{x}$.

3° limite d'une fonction composée

α, β, γ sont chacun un réel ou l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & f(x) & & \\ & & y & \longmapsto & g(f(x)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \beta & & \gamma \end{array}$$

a) Théorème

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x \to \beta} g(y) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g \circ f(x) = \gamma$.

c) exemple

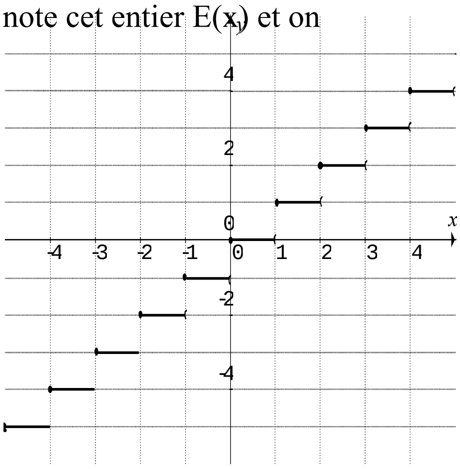
en $+\infty$	en 1	en $+\infty$	en 0
$x \longmapsto \sqrt{3x^2 - 3x + 1}$	$x \longmapsto \sin \dfrac{x^2 - 1}{x}$	$x \longmapsto \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x} + 2}$	$x \longmapsto \dfrac{\cos x + 2}{(\cos x - 1)^2}$

IV CONTINUITE

1° Des exemples de fonctions non continues.

- **La fonction partie entière.**

Pour tout réel x, il existe un entier relatif n et un seul tel que : $n \le x < n+1$. On note cet entier E(x) et on l'appelle partie entière de x.



On défini ainsi une fonction $x \longmapsto E(x)$ appelée fonction "Partie entière"

A tout réel x, cette fonction associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

On a en résumé : $E(x) = n \Leftrightarrow n \le x < n + 1$.

Exemples : $E(4) = 4$ car $4 \le 4 < 5$

•$E(6,2) = 6$ car $6 \le 6,2 < 7$

• $E(-2) = -2$ car $-2 \le -2 < -1$

• $E(-4,3) = -5$ car $-5 \le -4,3 < -4$

Si n est un nombre entier, alors $E(n) = n$ (et réciproque ment)

et pour tout $x \in [n \,;\, n + 1[$, on a $E(x) = n$

La représentation graphique de la fonction "Partie entière" est donnée ci-contre.

La fonction partie entière" est une fonction dite "en escalier".

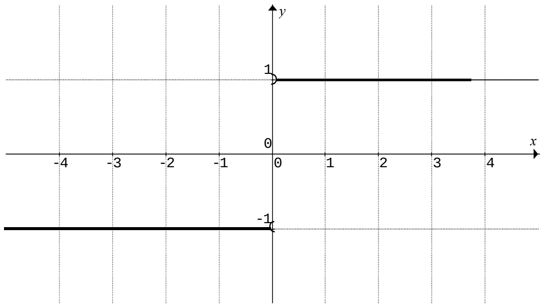
La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$.

En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, E(x) n'est pas très proche de E(n).

E(3,99999999999) = 3 et E(4) = 4.

- **La fonction signe.**



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Si $x < 0$ alors $f(x) = -1$

Si $x > 0$ alors $f(x) = +1$.

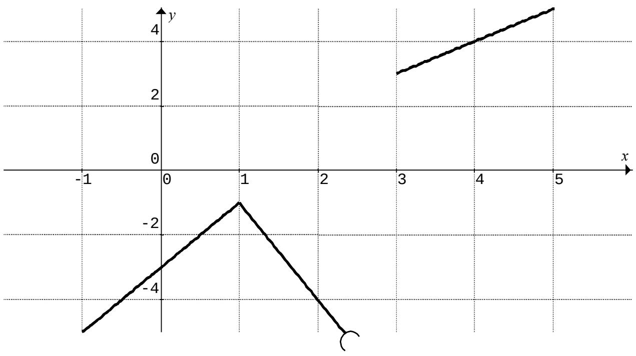
La courbe fait "un saut" pour x proche de 0.

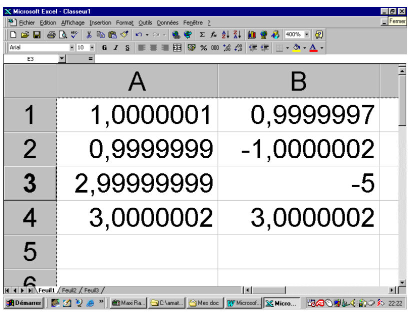
$f(-0,00000000002) = -1$ et $f(0,000000003) = 1$.

Cette fonction n'est pas définie en 0 et elle n'a pas de limite en 0

On ne peut pas la prolonger par continuité.

- Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = -3x + 4 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ f(x) = x & \text{si } x > 3 \end{cases}$





	A	B
1	1,0000001	0,9999997
2	0,9999999	-1,0000002
3	2,99999999	-5
4	3,0000002	3,0000002
5		

<u>2° Définition</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est continue en a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout point a de I.

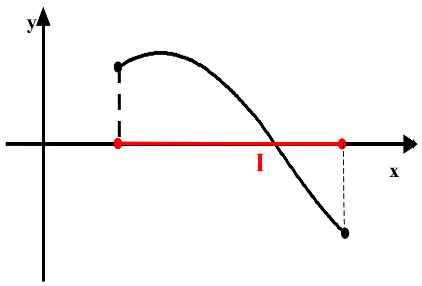
Remarque

Pour étudier la continuité d'une fonction en a f doit être définie en a.
Dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ revient aussi à dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

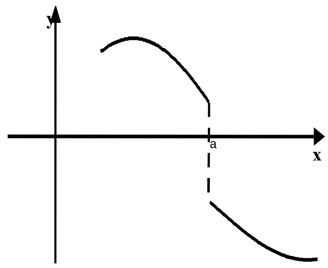
Graphiquement, on reconnaît qu'une fonction f est continue sur I lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle I sans lever le stylo de la feuille.

Une fonction n'est pas continue en un point a lorsque pour tracer sa représentation graphique on doit lever le stylo et faire un "saut".

Fonction continue sur l'intervalle I.



Fonction discontinue en a



<u>3° Propriété</u> (admise)

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques

La démonstration de cette propriété se fait en utilisant les propriétés des limites.
La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.

Convention

Il est convenu que, dans un tableau de variation de fonction, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

<u>4° Théorème des valeurs intermédiaires</u>

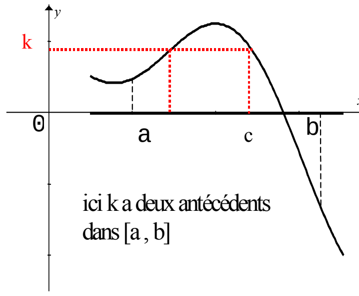
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$ et k un réel tel que : $a \leq k \leq b$
Il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.

Exemple. Racine cubique de 5

f définie par $f(x) = x^3$ est continue et strictement croissante sur $[\,0 \,;\, +\infty\,[$,
$f(1) = 1$ et $f(2) = 8$
Donc pour tout $k \in [1 \,;\, 8]$, l'équation $x^3 = k$ a au moins une solution dans $[1 \,;\, 2]$
En particulier l'équation $x^3 = 5$ a au moins une solution α dans $[1 \,;\, 2]$.
De plus, f étant strictement croissante, si $x > \alpha$, on a $f(x) > f(\alpha)$, donc $x^3 > 5$
et si $x < \alpha$, on a $f(x) < f(\alpha)$, donc $x^3 < 5$.
Il ne peut donc pas y avoir de solution à l'équation $x^3 = 5$, qui soit différente de α.
Donc l'équation $x^3 = 5$ a une solution α unique dans l'intervalle $[1 \,;\, 2]$.
Le théorème des **valeurs intermédiaires** permet d'affirmer que l'équation $x^3 = 5$
Les variations de f permettent d'affirmer que cette solution est unique.

Ce réel α est appelé racine cubique de 5 , on note $\alpha = \sqrt[3]{5}$

5° Corollaire



Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur l'**intervalle** [a ; b].
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il **existe un** et un **seul** réel c dans [a ; b] tel que $f(c) = k$
L'équation $f(x) = k$ **a une** solution **unique** c dans [a ; b].

Remarque 1

Dans le cas où f est strictement croissante sur [a ; b], le théorème précédent justifie que :
pour tout $k \in [f(a) ; f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans [a ; b].
On dit que f réalise une bijection de [a ; b] sur [f(a) ; f(b)].
La fonction qui, à tout réel k de [f(a) ; f(b)] associe l'unique réel c de [a ; b] tel que $f(c) = k$ est appelée fonction réciproque de f, elle est notée f^{-1}.
$f(c) = k$ se traduit alors par $c = f^{-1}(k)$
Lorsque f est strictement décroissante sur [a ; b], elle réalise une bijection de [a ; b] sur [f(b) ; f(a)] et on notera de même f^{-1} sa fonction réciproque.

Remarque 2

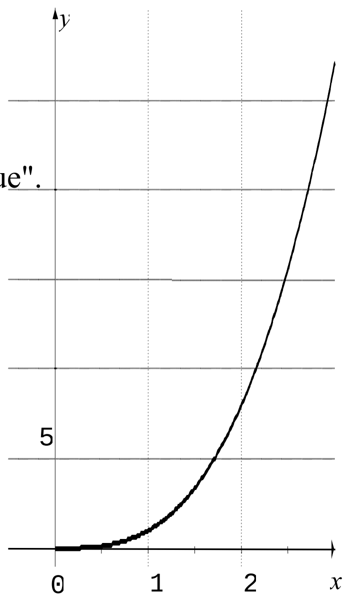
Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle.
Par exemple :

- si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur]a ; b], alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) ; f(b)\right]$ l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans]a ; b].
- si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur]-∞ ; a[, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) ; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]-\infty ; a[$.

Démonstration :
Soit f continue et strictement croissante sur l'intervalle [a , b]
D'après le théorème des valeurs intermédiaires si k est un réel de l'intervalle [a , b] alors l'équation $f(x) = k$ a une solution et il faut juste démontrer que cette solution est unique. On raisonne par l'absurde.
Soit α et β deux solutions de l'équation $f(x) = k$
Si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) < f(\beta)$ alors $k < k$ ce qui est impossible? on a donc bien $\alpha = \beta$ et on peut dire que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.

Exemple fonction racine cubique.

La fonction f définie par $f(x) = x^3$ est une fonction définie, continue et strictement croissante sur ℝ
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Pour tout réel $k \in \mathbb{R}$, l'équation $x^3 = k$ a une solution unique dans ℝ.



Cette solution est $\sqrt[3]{x}$
Donc f réalise une bijection de ℝ sur ℝ.
La fonction réciproque de la fonction "cube" est la fonction est la fonction "racine cubique".

Exemple la fonction tangente.

L'équation $\tan x = \frac{1}{2}$ a une solution unique α dans $[0 ; \frac{\pi}{4}]$.
On connaît le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle [0 ; π/4]
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur [0 ; π/4]
L'équation $\tan x = \frac{1}{4}$ a, dans l'intervalle [0 ; π/4], une solution unique α .

x	0		π/4
tan	0	↗	1