$\boxed{1}$ On considère la fonction f définie sur M par : $f(x)= \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1° a) Calculer la dérivée f ' de la fonction f et montrer que $f'(x)= \dfrac{P(x)}{(x^2+3)^2}$ où P est le polynôme défini par : $P(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$. Déterminer une racine évidente de P et factoriser P.

b) Déduire de ce qui précède les variations de f .

2° a) Déterminer 3 réels a, b, c tels que pour tout x de M , $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2+3}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ en $-\infty$.

c) Montrer que la droite (D) d'équation "y = x – 1 " est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

3° a) Démontrer qu'il existe un et un seul point A de la courbe (C) où la tangente est parallèle à (D).
Préciser les coordonnées de A ainsi qu'une équation de la tangente (Δ_1) en A.

b) Donner une équation de la tangente (Δ_2) au point B de la courbe (C) d'abscisse – 1.
Construire la courbe (C) ainsi que les droites (D), (Δ_1) et (Δ_2).

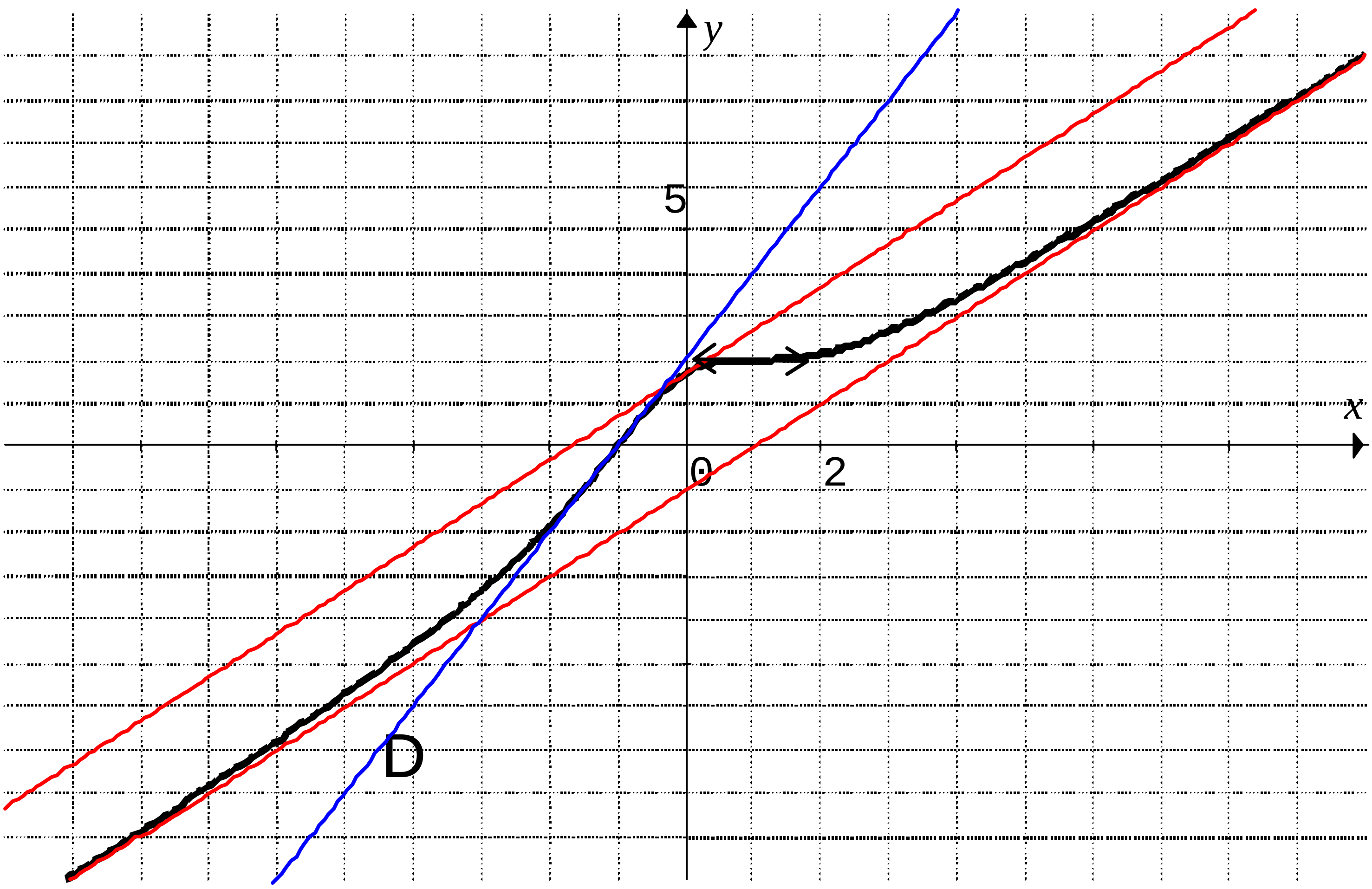
$\boxed{2}$ Soit la fonction définie sur $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 4}$ et C_f sa courbe représentative.

1° Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2° a) Montrer que la droite D d'équation "y = – 2 x" est asymptote à C_f.

b) Etudier la position de C_f relative de C_f et D .

3° Prouver que la courbe C_f admet une autre asymptote, dont on précisera l'équation.



Correction.

$\boxed{1}$ 1° a) $u(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$: $u'(x) = 3x^2 - 2x + 3$. $v(x) = x^2 + 3$: $v'(x) = 2x$..

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3) - (x^3 - x^2 + 3x + 5)(2x)}{(x^2 + 3)^2} =$$

$$\frac{3x^4 + 9x^2 - 2x^3 - 6x + 3x^2 + 9 - 2x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 10x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 16x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

$P(1) = 0$ donc $P(x) = (x - 1) \times (x^3 + x^2 + 7x - 9) = (x - 1) \times (x - 1) \times (x^2 + 2x + 9)$

b) Le polynôme $x^2 + 2x + 9$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x , $x^2 + 2x + 9 > 0$. De plus pPour tout réel x, $(x^2 + 3)^2 > 0$. On peut donc dire que P(x) est du signe de $(x - 1)^2$

x	$-\infty$		1	
f '(x)		+	0	+
f	$-\infty$			

2° a) $f(x) = x - 1 + \dfrac{8}{x^2 + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x - 1) = 0$.

3° a) $f'(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^4 + 6x^2 - 16x + 9}{(x^2 + 3)^2} = 1$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$ $[\ (x^2 + 3)^2 \neq 0\ ]$

$\Leftrightarrow x^4 + 6x^2 - 16x + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 \Leftrightarrow x = 0$.

$A\left(0 , \dfrac{5}{3}\right)$ Δ_1 : " $y = f(0) + f'(0) \times (x - 0)$ " c'est-à-dire "$y = \dfrac{5}{3} + x$".

Δ_2 : "$y = f(-1) + f'(-1) \times (x + 1)$" c'est-à-dire "$y = 2x + 2$.

$\boxed{2}$ 1° $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. $-x + \sqrt{x^2 - 4} = \dfrac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$

$= \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$.. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} + x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$.

2° a) $f(x) - (-2x) = -x + \sqrt{x^2 - 4} + 2x = x + \sqrt{x^2 - 4} = \dfrac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} - x}$. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} - x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} - x} = 0$. La droite d'équation $y = -2x$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ à $-\infty$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ à $+\infty$.