DES LIMITES REMARQUABLES

Le but de ce TD est de calculer les limites $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ et $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$

<u>Limite en zéro avec la fonction sinus</u>

Le calcul de la limite en 0 de sin h nous conduit à une forme indéterminée car numérateur et dénominateur tendent vers 0 avec h .

En utilisant une calculatrice on peut conjecturer conjecturer que la limite est … … … Ce qui suit a pour but de démontrer ce résultat.

1° On suppose que h est dans l'intervalle] 0 ; p /2 [

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

On note M le point de T tel que h est la mesure principale en radians de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

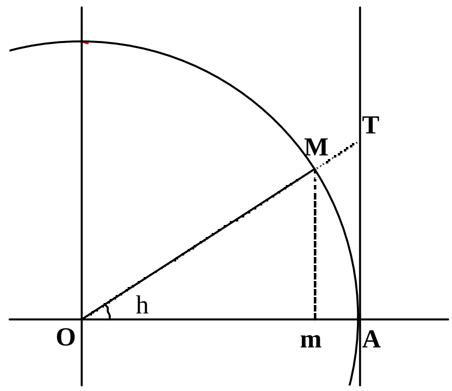
h est donc aussi la mesure principale en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOM}$

Dans ces conditions et avec les notations de la figure,

on sait que OA = 1 ; Om = … … ; Mm = … …

et l'arc $\overset{\frown}{AM}$ a pour longueur h.

L'aire du triangle OAM est inférieure à l'aire du secteur circulaire OAM,
 elle-même inférieure à l'aire du triangle OAT



$\mathcal{A}$ (triangle OAM) ≤ $\mathcal{A}$ (secteur circulaire OAM) ≤ $\mathcal{A}$. (triangle OAT)   [1]

a) Prouver que l'aire du secteur circulaire OAM est $\frac{h}{2}$,

b) Prouver que l'aire du triangle OAM est $\frac{1}{2}$ sin h.

c) Prouver que l'aire du triangle OAT est $\frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$

d) En déduire que les inégalités [1] s'écrivent : $\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$

e) Tous les réels qui interviennent dans ces inégalités étant positifs, en déduire que : $\frac{\sin h}{h} \leq 1$ et $\cos h \leq \frac{\sin h}{h}$

et que pour tout réel h appartenant à] 0 ; π/2 [, $\boxed{\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1}$.

2° On suppose que h est dans l'intervalle] – p /2 ; 0 [

On pose : h' = – h, alors h' > 0 et d'après l'étude précédente, $\cos h' \leq \frac{\sin h'}{h'} \leq 1$.

En déduire un encadrement de $\frac{\sin h}{h}$ quand h ap] – π/2 ; 0 [

3° conclusion

La fonction usuelle $x \longmapsto \cos x$ a pour limite 1 en 0. En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ = … …

<u>Limite en zéro avec la fonction cosinus</u>

Le calcul de la limite en 0 de $\frac{\cos h - 1}{h}$ conduit aussi à une forme indéterminée car numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand h. tend vers 0.

1° a) En remarquant que cos h = 1 – 2 sin 2h , prouver que $\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$.

b) En déduire $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ et $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2}$